Sicheres und risikobehaftetes Einkommen
– Ein Anwendungsfall der Zeit-Zustand-Präferenztheorie

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

Elke Schäfer

Saarbrücken 1975

1976

'Sicheres und risikobehaftetes Einkommen
- Ein Anwendungsfall der Zeit-Zustand-Präferenztheorie'

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

Elke Schäfer
Saarbrücken 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation:	13. Februar 1976
Dekan:	Prof. Dr. W. Kroeber-Riel
Erstberichterstatter:	Prof. Dr. R. Richter
Zweitberichterstatter:	Prof. Dr. V. Steinmetz

G l i e d e r u n g

Seite

0. Problemstellung

1. Darstellung des verwendeten Konzepts - 1 -

1.1 Theorie des Haushalts bei Ungewißheit - grundsätzliche Überlegungen - 1 -

1.1.1 Zum Güter- und Zustandsbegriff - 1 -

1.1.2 Zum Begriff der Ungewißheit - 4 -

1.1.3 Zum Begriff der mehrdeutigen Entscheidung - 5 -

1.1.4 Zum Entscheidungskriterium - 7 -

1.1.5 Zur Meßbarkeit des Risikos - 8 -

1.1.6 Arten der Ungewißheit - 11 -

(Parametrische Ungewißheit, Transaktionsungewißheit)

1.2 Theorie des Haushalts bei Ungewißheit - das Arrow-Debreu-Modell - 16 -

1.2.1 Einordnen der Theorie - 16 -

1.2.2 Darstellung des Arrow-Debreu-Modells - 17 -

1.2.2.1 Der Güterraum - 17 -

1.2.2.2 Marktsysteme - 21 -

(Titel, Vollständiges System, Beschränktes (vollständiges) System - Assets als Handelsobjekte, Unvollständiges Marktsystem, Marktfolgensystem - Nichthandelbarkeit von human capital)

1.2.2.3 Zulässigkeitsbereich und individueller Möglichkeitsbereich - 35 -

1.2.2.4 Die Zielfunktion der Haushalte - 41 -

(Axiome rationalen Verhaltens bei Ungewißheit, Bernoulli-Nutzen)

1.2.2.5 Marktsysteme und intertemporäre Planung - 51 -

1.2.3 Das Tauschgleichgewicht im Einperiodenfall - 53 -

1.2.3.1 Vollständiges Marktsystem - 53 -

1.2.3.2 Der Ansatz von Arrow - 60 -

(Version 1, Version 2, Bemerkungen zu Arrows Ungewißheitsalternativen)

1.2.3.3 Beschränktes System - 67 -

(Äquivalenz der Systeme, Optimierungsansätze, Herleitung der Optimalbedingungen, Paretooptimalität, Slutsky-Gleichungen)

2. Die Untersuchung marktkonformer Umverteilungskonzepte im Arrow-Debreu-Modell - 79 -

2.1 Einführung und Abgrenzung - 79 -

2.1.1 Risikoverteilung im Gleichgewicht - 79 -

2.1.2 Risikoverteilung als Einkommensverteilung - 79 -

2.1.3 Möglichkeiten der Umverteilung - 81 -

2.1.3.1 Abgrenzung des Begriffs - 81 -

2.1.3.2 Umverteilung durch Beeinflussung der subjektiven Parameter - 84 -

2.1.3.3 Umverteilung durch Beeinflussung des Titelangebots - 85 -

2.1.3.4 Entlohnungsform und Verteilung - 85 -

2.1.4 Umverteilung und Marktsysteme - 88 -

2.1.4.1 Vollständiges Marktsystem - 88 -

2.1.4.2 Beschränktes Marktsystem - 89 -

2.1.5 Gliederung der Untersuchung - 9o -

2.2 Theorie der Umverteilung durch Titelangebotsvariation in einem Grundmodell der Risikobeteiligung - 92 -

2.2.1 Modellannahmen - 92 -

2.2.1.1 Das Modell - 92 -

2.2.1.2 Grundsätzliches zur Modellwahl - 1o2 -

2.2.2 Umverteilung durch Titelangebotsvariation - vollständiges System - 1o5 -

2.2.2.1 Das Grundmodell als Elementarsystem - 1o5 -

2.2.2.2 Optimierung - 11o -

2.2.2.3 Gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht - 111 -

2.2.2.4 Angebotsvariation vom Typ A (Quantitative Titelmodifikation) - 115 -

2.2.2.5 Angebotsvariation vom Typ B (Qualitative Titelmodifikation) - 121 -

2.2.2.6 Zusammenfassung der Ergebnisse - 124 -

2.2.3 Umverteilung durch Titelangebotsvariation - beschränktes System - 126 -

2.2.3.1 Optimierung - 127 -

2.2.3.2 Gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht - 13o -

2.2.3.3 Quantitative Titelmodifikation ('Angebotsvariation vom Typ A') - 132 -

2.2.3.4 Qualitative Titelmodifikation ('Angebotsvariation vom Typ B') - 133 -

2.2.3.5 Angebotsvariation vom Typ B - der Fall identischer Haushalte - 136 -

2.2.3.6 Angebotsvariation vom Typ B - der Fall der Gültigkeit des Separationstheorems (Separationstheorem - Verallgemeinerung des Anwendungsbereichs - Anwendung im Grundmodell) - 138 -

2.2.4 Zu den Ergebnissen - 145 -

2.2.4.1 Bemerkungen zur Gültigkeit der unterstellten Theorien - 145 -

2.2.4.2 Relevanz der Ergebnisse - allgemein - 146 -

2.2.4.3 Relevanz der Ergebnisse - gezeigt anhand eines Beispiels - 148 -

3. Schluß - 152 -

Anhang A - 165 -

Anhang B - 167 -

Literaturverzeichnis - 175 -

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547310_0036

0. Problemstellung

Gegenstand der Untersuchung sind - ganz generell - wirtschaftliche Entscheidungen im Zeitverlauf unter Ungewißheit. Dabei stehen im Mittelpunkt das Risiko und seine optimale Verteilung.

Angeregt durch den Vermögensbildungsvorschlag des Sachverständigenrates zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung aus dem Jahre 1972 wird analysiert, ob durch Umstrukturierung der sicheren und risikobehafteten Entlohnungsformen für die Produktionsfaktoren Vermögensumverteilung erreicht werden kann. Es wird sich zeigen, daß sich diese Fragestellung in die folgende Überlegung übersetzen läßt: Bei vorgegebener Produktion der Unternehmungen ist zu untersuchen, ob eine Gleichgewichtssituation auf den Kapitalmärkten durch eine Änderung der Struktur des Wertpapierangebots beeinflußt wird. Die Trennung von Produktions- und Entlohnungsentscheidung hat ihre Analogie in der traditionellen Kapitalmarkttheorie.[1] Die Einbeziehung der Untersuchung des Unternehmungsziels[2] kann also - ohne die Notwendigkeit der simultanen Entscheidung im Unternehmungsbereich zu negieren - im vorliegenden Rahmen unterbleiben. Wir konzentrieren uns deshalb

---

1) Vgl. so z.B. W.F. Sharpe (1964), J. Lintner (1965 a und b), J. Mossin (1966) oder auch E.F. Fama und M.H. Miller (1972).

2) Die Einschränkung der Problemstellung derart, daß sie die Theorie der Unternehmung unter Ungewißheit nicht zu berücksichtigen braucht, scheint auch im Hinblick auf den gegenwärtigen Stand der Forschung auf diesem Gebiet angebracht. Zwar ist bei Annahme der Vollständigkeit des Handels der ungewissen Produktion wie bei Sicherheit die Gewinnmaximierung das Unternehmungsziel, das im Sinn der Unternehmungseigner anzustreben ist. Dagegen ist das für den realistischeren Fall beschränkten Handels unterstellte Ziel der Marktwertmaximierung (vgl. hierzu z.B. P.A. Diamond (1967), J.E. Stiglitz (1972), M.C. Jensen und J.B. Long Jr. (1972), E.F. Fama (1972)) nicht eindeutig zugunsten aller beteiligten Haushalte, wie z.B. J.B. Long Jr. (1972 b) und S. Ekern und R. Wilson (1974) nachweisen. Zwecks Unterrichtung über die neueste Entwicklung der Theorie der Unternehmung unter Ungewißheit sei auf H.E. Leland (1974), R.C. Merton und M.G. Subrahmanyam (1974) sowie S. Ekern und R. Wilson (1974) verwiesen.

auf den Fall des Tauschgleichgewichts, die optimale Entscheidung der Haushalte unter Ungewißheit betreffend.

Das zur Untersuchung verwendete Instrumentarium ist die sogenannte Zeit-Zustand-Präferenztheorie (Arrow-Debreu-Modell), die in Teil 1 ausführlich dargestellt wird. Dabei handelt es sich um eine Weiterentwicklung der traditionellen Preistheorie zur Berücksichtigung von Risiko. Das breite Anwendungsfeld der Zeit-Zustand-Präferenztheorie - die eigentliche Versicherungstheorie - bleibt in der vorliegenden Arbeit, abgesehen von einigen Randbemerkungen, unerwähnt.[1)]

1) Als einführende Literatur hierzu sei nur exemplarisch auf K.J. Arrow (1970), S. 134ff. verwiesen.

1. Darstellung des verwendeten Konzepts

1.1 Theorie des Haushalts bei Ungewißheit - grundsätzliche Überlegungen

Die nachfolgenden Bemerkungen orientieren sich insbesondere an Arbeiten von Marshak, Schneeweiß und Drèze.[1] Sie sollen die Entscheidungssituation des Haushalts unter Ungewißheit - vor allem ihre Abweichungen gegenüber dem Fall der Sicherheit - verdeutlichen unter Berücksichtigung des in der vorliegenden Arbeit dann speziell verwendeten Ansatzes.

1.1.1 Zum Güter- und Zustandsbegriff

Mit dem Begriff 'Entscheiden' wird ganz allgemein bewußtes, eine bestimmte Zielgröße beeinflussendes Verhalten von Individuen - im ökonomischen Bereich Wirtschaftssubjekte genannt - umschrieben.[2] So ist die Zielgröße für das Wirtschaftssubjekt Haushalt das eigene Befinden, der sogenannte Nutzen. Der Nutzen ist eine Folge der Gesamtheit der äußeren Eindrücke, die der Haushalt wahrnimmt (Nutzenfunktion). Äußere Eindrücke - Komponenten der Umgebung - werden nur registriert, wenn sie für die Beurteilung des Nutzens von Bedeutung sind. Es ist zwischen unbeeinflußbaren und beeinflußbaren Komponenten zu unterscheiden. Eine Komponente heißt (un)beeinflußbar, wenn es durch individuelle Initiative

---

1) J. Marshak (1950), H. Schneeweiß (1967), J.H. Drèze (1974).

2) Der Begriff ist so weit auslegbar, daß er auch das Delegieren von Entscheidungen umfaßt, also die Entscheidung, daß andere Individuen für bestimmte Teilbereiche nach Maßgabe von objektivierbaren = nachprüfbaren Regeln - z.B. Gewinnmaximierung - vom letztlich Entscheidenden vorgegeben handeln. Das Problem der Gewährleistung der Anwendung von Entscheidungsregeln im Sinne des Betroffenen ist grundsätzlich lösbar durch die Konstruktion mit Sicherheit möglichen Regresses im weitesten Sinne. Diesbezügliche Überlegungen würdem hier aber zu weit führen. Ebenso sind das Nichtentscheiden wegen zu hoher Kosten für das Beschaffen von Informationen über die möglichen Alternativen und das bewußte Nichtstun Entscheidungen im obigen Sinne.

technisch und kulturell grundsätzlich (nicht) möglich ist - z.B. durch Tausch oder Produktion - subjektiv wahrnehmbare Mengenvariationen zu erzeugen. Eine ort-zeitgebundene, mit bestimmter subjektiver Wahrscheinlichkeit ausgestattete Kombination aller unbeeinflußbaren äußeren Eindrücke wird Zustand (der Umgebung oder Welt) in diesem Zeitpunkt an diesem Ort genannt. Eine in diesem Sinne beeinflußbare Komponente wird in der herkömmlichen wirtschaftswissenschaftlichen Sprache mit dem Begriff des 'Gutes' umschrieben. Güter - oder auch Argumente der Nutzenfunktion - sind ihrer Qualität nach zu differenzieren. Sie verlangen außerdem Zeit-, Ort- und Zustandsangabe ihrer Einwirkung - des Verbrauchs -, wenn Zeit-,Ort- und Zustandsunterschiede den Nutzen des Haushalts beeinflussen.[1)]

Die mengenmäßige Angabe[2)] bezüglich der einzelnen Güterkomponenten charakterisiert dann eine spezielle sichere oder ungewisse Situation, auch Güterkombination oder Gütervektor genannt.

Sobald der Haushalt von unterschiedlichen Gütervektoren spricht, müssen sich diese aus subjektiver Sicht mengenmäßig in mindestens einer Komponente unterscheiden. Zwei Gütervektoren sind identisch und haben damit den gleichen Nutzen, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. Solange es noch möglich ist, daß ein Haushalt zwei Gütervektoren, die in allen Komponenten übereinstimmen, unterschiedliche Nutzen zuordnet, sind die Beschreibungsmerkmale noch nicht ausreichend differenziert. Insbesondere muß auch gelten: Ein Haushalt ist indifferent zwischen einer Kombination von Gütervektoren und dem entsprechenden zusammengesetzten Gütervektor. Ein Verbrauchsplan ist ein Gütervektor, den ein Haushalt für sich wählt.

---

1) Der Zustand ist möglicherweise ausreichend gekennzeichnet allein durch die ihm zugeordnete Wahrscheinlichkeit.

2) Hierbei wird als selbstverständlich vorausgesetzt, daß für jede Komponente ein objektiver Maßstab vorhanden ist.

Güter, die als Handelsobjekt in Frage kommen (Güter im wirtschaftlichen Sinne), sind ex definitione Gegenstand von Entscheidungen in einer Tauschwirtschaft. Voraussetzung des Handels sind z.B. objektive Qualitäts- und Mengennormen. Ob gehandelt wird, ist außerdem abhängig von den Wertvorstellungen der Wirtschaftssubjekte. Auch sind die Kosten des Tauschs (Transaktionskosten) möglicherweise prohibitiv. In der Haushaltstheorie für den Sicherheitsfall wird grundsätzlich angenommen, daß alle beeinflußbaren Situationskomponenten auch Handelsobjekte sind.[1)]
Daneben sind die nur indirekt beeinflußbaren Komponenten zu beachten, die ausschließlich im Zusammenhang mit anderen Gütern gehandelt werden, und zwar dann, wenn diese Kombinationen erst in der Verbrauchsphäre für alle gleichermaßen getrennt werden. Dies gilt für ungewisse Güterkombinationen, mehrere Zustände betreffend. Bei Annahme von Risiko ist somit die Konstruktion einer begrifflichen Divergenz zwischen Gütern und Handelsobjekten sinnvoll.[2)]

Die Menge aller im Prinzip durch die Wirtschaftssubjekte direkt oder indirekt beeinflußbaren Gütervektoren (≥ 0) wird Güterraum genannt. Der Zulässigkeitsbereich desselben ist die Menge aller im Prinzip unter Berücksichtigung der gerade erwähnten Handelsrestriktionen realisierbaren Gütervektoren.

Alle nicht handelbaren Güter können den Zuständen zugeordnet werden. Zustandsverteilung und die individuellen Güterausstattungen je Zustand charakterisieren die zu bewertende ungewisse Situation des Haushalts.

---

1) Vgl. z.B. R. Richter (1970), S. 9

2) Siehe z.B. J. Hirshleifer (1970), S. 216. Vgl. hierzu auch Abschnitt 1.2.2.2.

1.1.2 Zum Begriff der Ungewißheit

Der Zustand heute ist eine subjektive sichere Situation, in der jede Güterkomponente vorgegeben ist (sog. Ausgangssituation). Für jeden künftigen Zeitpunkt, für den entschieden werden kann, sind zwei Alternativen bezüglich des Entscheidungsergebnisses denkbar:

- Das künftige Ergebnis heutiger Entscheidung ist eindeutig infolge eines künftig zu beobachtenden Zustands (Entscheidung unter Sicherheit).
- Das künftige Ergebnis ist ungewiß infolge einer Vielzahl möglicher künftiger Zustände, von denen genau einer realisiert wird, wobei die Realisation durch den Entscheidenden unbeeinflußbar ist.[1] (Entscheidung unter Ungewißheit) Im günstigsten Fall kann das einzelne Wirtschaftssubjekt seinen künftigen Verbrauchsplan für jeden Zustand 'sicher' wählen, nicht jedoch den (unbeeinflußbaren) Zustand.[2] Dieser Grenzfall 'vollkommen beeinflußbarer Güter' bedeutet unter der Annahme von Ungewißheit, daß alle Komponenten des Verbrauchsplans mit Ausnahme ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten subjektiv bestimmbar sind. Ein Aufheben dieser letzten Mindestbeschränkung würde ein 'Hinwegdefinieren' des Risikoelements einer Wirtschaft, also den - hier ausgeschlossenen - Sicherheitsfall bedeuten.

Völlige Unkenntnis bezüglich alternativ möglicher künftiger Zustände wird mit Ungewißheit bezeichnet, die Kenntnis der möglichen Zustände und ihrer Wahrscheinlichkeiten mit

---

1) Das Wesen der ungewissen Zukunft ist ja gerade die partielle Unbeeinflußbarkeit der dann zur Verfügung stehenden Gütermengen für alle Wirtschaftssubjekte.

2) Die Problematik der Annahme der Unbeeinflußbarkeit der Zustände wird unter dem Stichwort 'moral hazard' behandelt. Vgl. hierzu1.1.6, insb. S. 14 , und die dortigen Verweise.

Risikosituation umschrieben. Eine Risikosituation unterscheidet sich von der sicheren Situation allein durch die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten in Form diskreter oder stetiger Verteilungen für alternative Quantitäten der Güterkomponenten, während in beiden Fällen die gleiche Anzahl von Qualitätsmerkmalen wahrgenommen werden soll. Dabei ist nach den vorangegangenen Überlegungen zu beachten, daß diese Kenntnis nicht identisch ist mit der individuellen Wahlmöglichkeit bezüglich der riskablen Zustände. Die Annahme der Existenz zumindest subjektiver Wahrscheinlichkeitsverteilungen läßt jede 'Ungewißheitssituation' zur 'Risikosituation' werden. Im folgenden werden die beiden Begriffe daher synonym verwendet.[1] Diese Annahme ist analog der Annahme einer vollständigen Erfassung des Möglichkeitsbereiches in der Entscheidungstheorie unter Sicherheit und akzeptabel, wenn letztere zulässig erscheint.[2] Das Problem ist in beiden Bereichen das gleiche: Alle grundsätzlichen Zweifel an der Fähigkeit des Wirtschaftssubjekts, seine Möglichkeiten zu erkennen, lassen sich auf das Erstellen einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen. Weitere kommen nicht hinzu.[3]

1.1.3 Zum Begriff der mehrdeutigen Entscheidung

Das ort- und zeitgebundene Wirtschaftssubjekt - hier der Haushalt - kann durch sog. Aktionen seine Ausgangssituation - genauer die mengenmäßige Intensität der beeinflußbaren Komponenten dieser - umstrukturieren. Eine ort-zeit-risikogebundene Kombination der beeinflußten Komponenten wird Ergebnis oder Folge genannt, und zwar sicheres Ergebnis, wenn

---

1) Die in der Literatur vielfach anzutreffende Unterscheidung zwischen 'Risiko' = Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung einerseits und 'Ungewißheit' bezüglich dieser andererseits (so auch H. Schneeweiß (1967), S. 12), erscheint nicht sinnvoll unter der Annahme, daß sich jede Ungewißheitssituation subjektiv durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erfassen läßt, so auch J. Hirshleifer (1970), S. 215 FN. - Zur Existenz subjektiver Wahrscheinlichkeitsverteilungen siehe L.J. Savage (1954), S. 30 ff.

2) In beiden Fällen ist die Kapazität des Wirtschaftssubjekts, Erfahrung, Phantasie und Informationsmöglichkeit betreffend, entscheidend.

3) Was den Ungewißheitsfall betrifft, beginnt hier das Betätigungsfeld der 'Bayesian statistics', vgl. z.B. J.H. Drèze (1974), S. 19.

seine Eintrittswahrscheinlichkeit gleich 1, also zustandsunabhängig ist, und ungewisses Ergebnis, wenn die gewählten Güterkomponenten je nach Zustand variieren. Ein ungewisses Ergebnis ist als Ergebnisverteilung[1] oder als zustandsabhängiger Gütervektor (Anspruch) darstellbar. Aktionen, die nur eine Komponente des Gütervektors und damit nur einen Zustand betreffen, werden Elementaraktionen genannt.[2] Die Ergebnisse solcher Aktionen haben im Ungewißheitsfall stets eine Eintrittswahrscheinlichkeit kleiner eins (Beispiel: der Tausch elementarer Ansprüche).

Aktionen sind unter der Annahme von Sicherheit über die künftigen Zustände der Welt bzw. bei Ungewißheit dann eindeutig wählbar, wenn jedes Gut in jedem Zustand Handelsobjekt sein kann. Sieht man außerdem nur Aktionen mit unterschiedlichen Ergebnissen als unterschiedlich an, dann ist in den beiden angeführten Fällen eine eineindeutige Zuordnung von Aktion und Ergebnis gegeben und die beiden Begriffe sind synonym verwendbar (Aktion = Ergebnis).[3]
Die Unterscheidung zwischen den Begriffen 'Aktion' und 'Ergebnis' ist erforderlich, wenn die Beziehung zwischen beiden nicht eineindeutig ist. Dies ist im Risikofall dann zu beachten, wenn die Aktionen, die Güter betreffend, nicht nach Zuständen aufspaltbar sind: Je nach ungewissem Zustand, der eintreten kann, kann eine Aktion ein anderes Ergebnis haben. Die Aktion mit ungewissem Ausgang (mehrdeutige Aktion) ordnet also alternativ möglichen Zuständen - im Grenzfall unendlich vielen - bestimmte einander ausschließende Ergebnisse zu.[4]

---

1) Die Ergebnisverteilungen einer endlichen Anzahl von möglichen Aktionen lassen sich mit Hilfe der sog. Ergebnismatrix erfassen, vgl. z.B. H. Schneeweiß (1967), S. 12.

2) Hierzu zählen natürlich die Entscheidungen über ein Gut unter Sicherheit. In den nicht betroffenen Zuständen bleibt die Ausgangssituation erhalten. So kann man in diesem Fall auch von einer - ausgearteten - Ergebnisverteilung sprechen.

3) Vgl. hierzu J.H. Drèze in J.H. Drèze (1974), S. 7 f.

4) 'an action is a function from the set of states to the set of results' - J. Marshak, (1950), S. 46; vgl. auch H. Schneeweiß, (1967), S. 10.

Die ungewissen Zustände, kombiniert mit den zugehörigen Ergebnissen aus einer vorangegangenen Aktion, ergeben eine ungewisse Folge mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände.

Eine Entscheidung ist die bewußte Wahl einer Aktion aus dem Bereich aller möglichen Aktionen. Die Entscheidung ist eindeutig bei der Auswahl aus Elementaraktionen, sie ist mehrdeutig im Fall von Ergebnisverteilungen. Es ist zu beachten, daß eindeutige Entscheidungen auch bei Vorliegen von Ungewißheit getroffen werden können. Mögliche Aktionen eines Haushalts sind alle im Prinzip denkbaren Gütermengen-Kombinationen (Zulässigkeitsbereich), die sich bei gegebener Ausgangssituation realisieren lassen (Budgetrestriktion). Die Aktionen werden - wie oben angedeutet - mit Hilfe ihrer Ergebnisse voneinander abgegrenzt.

1.1.4 Zum Entscheidungskriterium

Welche Entscheidung der Haushalt trifft, hängt von seiner Bewertung aller denkbaren Situationen - Rangordnung über dem Güterraum, bzw. Nutzenfunktion genannt - ab. Bei Sicherheit wird über dem sicheren Güterraum eine subjektive Rangordnung aufgestellt. Bei Vorliegen von Risiko wird den Ergebnisverteilungen bzw. dem zustandsabhängigen Güterraum eine Rangordnung zugeteilt, die sich unter bestimmten Annahmen 'rationalen Verhaltens' auf den Erwartungswert der Rangordnung bei Sicherheit zurückführen läßt. Dabei wird im Ungewißheits- wie im Sicherheitsfall[1)] vorausgesetzt, daß diese Rangordnungen bestimmten Mindestanforderungen genügen: Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit, Effizienz des Vergleichs. Wird eine Aktion mit dem höchsten Rang innerhalb der Ordnung gewählt, spricht man von einer optimalen Entscheidung (optimaler Verbrauchsplan). Ein Haus-

1) Zur Präferenzordnung bei Sicherheit vgl. z.B. R. Richter (1970), S. 21 ff.

halt heißt rational, wenn er erstens eine objektiv widerspruchsfreie Rangordnung der Alternativen hat und zweitens diese im o.a. Sinne anwendet, d.h. optimale Entscheidungen fällt.
Inhalt der Entscheidungstheorie ist es, u.a., für die subjektive Rangordnung möglichst viele allgemeingültige (weil als rational empfundene) und damit vorhersehbare = objektive Entscheidungskriterien zu finden, für den Ungewißheitsfall hat dies das im Abschnitt 1.2.2.4[1] dargestellte Konzept des Bernoulli-Nutzens zur Folge.
Daß die Wahrnehmung der Umgebung subjektiv verschieden ist, d.h. daß verschiedene Wirtschaftssubjekte selbst am gleichen Ort zur gleichen Zeit mit gleichen Mengen derselben Güter ausgestattet, verschiedene Umgebungen empfinden, wird als individuelle Bewertung der objektiv vorgegebenen Güterskala berücksichtigt.

Zur Rangordnung ist grundsätzlich noch Folgendes zu bemerken: Sie muß eine gewisse Stabilität im Zeitverlauf aufweisen, um sinnvoll zu sein, deshalb wird sie auch unter der Annahme von Risiko stets als unveränderlich im Zeitverlauf angenommen, d.h. insbesondere, daß Entscheidungen nicht wegen Unkenntnis der morgigen Präferenzen riskant sein sollen.[2]

1.1.5 Zur Meßbarkeit des Risikos

Meßbarkeit ist die Existenz objektiver Rangordnungen über subjektiven Situationen, bzw. über Komponenten dieser. Meßbarkeit ist also die Eigenschaft von Gütern, sich zu ihrer Unterscheidung eineindeutig anhand eines allgemeingültigen Kriteriums (Maßstab) auf der Zahlengeraden abbilden zu lassen. Existiert kein Maßstab derart, daß sich individuelle Wahr-

---

1) Vgl. S. 41ff.
2) Instabile - sogenannte stochastische - Präferenzen können als zustandsabhängig, d.h. als endogen eliminiert werden. Vgl. z.B. W. Hildenbrand (1971).

nehmungen eindimensional unverwechselbar mitteilen lassen, dann ist Meßbarkeit nicht gegeben. In der Entscheidungstheorie unter Sicherheit wird stets Meßbarkeit der Güter vorausgesetzt.

Um die Frage der Meßbarkeit von Risiko beispielhaft zu untersuchen, werde der Einfachheit halber eine elementare diskrete Ergebnisverteilung betrachtet, nämlich die Alternativen "1 DM Einnahmen mit der Eintrittswahrscheinlichkeit p" und "0 DM Einnahmen mit der Gegenwahrscheinlichkeit". Jeder denkbaren Wahrscheinlichkeitsverteilung (1,0; p) mit $0 \leq p \leq 1$ wäre eine Risikomeßziffer zuzuordnen mit der allgemeingültigen Bedeutung: Je größer diese Ziffer ist, desto größer ist das Risiko der Verteilung. Es ist nicht möglich, solch eine objektive Risikoskala für alle denkbaren Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu finden, genau so wenig, wie es eine objektive Rangordnung über andere mehrdimensionale Gütermerkmale gibt: Es gibt immer zwei Verteilungen, die von zwei Individuen beurteilt, eine Umkehrung in den individuellen Rangordnungen erfahren. Dies läßt sich für das hier betrachtete Beispiel wie folgt demonstrieren. A ziehe eine Gleichverteilung der Ergebnisse 1 DM oder 0 DM dem sicheren Ergebnis 0,4 DM vor. Es gibt keinen Grund, zwingend anzunehmen, daß auch B diese Reihenfolge wählt. Dies bedeutet letztlich die Unmöglichkeit interpersonellen Risikovergleichs. Zwar kann unter einschränkenden Bedingungen über die Beurteilung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen Allgemeingültiges gesagt werden. Bestimmte Klassen von Verteilungen lassen sich auf zwei Dimensionen - Erwartungswert und Streuung - reduzieren.[1] Die Angabe der individuellen Rangordnung beschränkt sich dann auf den Vergleich verschiedener (μ,σ)-Kombinationen (sog. (μ,σ)-Kriterium).[2]

---

1) Sog. (μ,σ)-Klassen, vgl. H. Schneeweiß (1967), S. 129 ff. Dabei handelt es sich um Verteilungen, die, sobald sie gleichen Erwartungswert (μ) und gleiche Streuung (σ) besitzen, nicht mehr unterschieden werden können, z.B. die Klasse der Normalverteilungen.

2) Ohne Einschränkung der Menge der Verteilungen ist das (μ,σ)-Kriterium nur ausreichend, wenn spezielle Annahmen über die Nutzenfunktion gemacht werden (sie muß nämlich quadratisch in dem sicheren Ergebnis sein), vgl. z.B. H. Schneeweiß, (1967), S. 96.

Auch wird von einem rational handelnden Entscheidungsträger angenommen, daß er eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit bestimmtem Erwartungswert und bestimmter Standardabweichung für weniger riskant hält als eine andere mit gleicher (größerer) Standardabweichung und kleinerem (gleichem) Erwartungswert, wenn beide der gleichen Klasse angehören. Daraus folgt die Effizienz als erstes grobes Maß für das Risiko einer Verteilung: Eine Verteilung heißt effizient, wenn sie bei gleichem μ ein mindestens ebenso kleines σ wie alle anderen Verteilungen hat, bzw. bei gleichem σ ein mindestens ebenso großes μ (Analogie zum Unersättlichkeitsaxiom). Das Meßproblem wird um eine Ebene angehoben: Es reduziert sich auf den Vergleich aller effizienten Verteilungen. Hier ist es unlösbar, denn die Indifferenz bzw. Präferenz bezüglich effizienter Verteilungen ist subjektiv (vgl. obiges Beispiel), weshalb die Konstruktion individueller Risikoskalen erforderlich wird, wie sie im Konzept des Bernoulli-Nutzens zum Ausdruck kommen (vgl. Abschn. 1.2.2.4, S.41 ff.). Soweit Risiko objektiv meßbar ist (d.h. allgemeingültige Bewertungskriterien für Risiko feststellbar sind), ist dies beim Aufstellen der individuellen Nutzenfunktionen unter Risiko zu berücksichtigen, und zwar grob gesagt, in der Weise, daß die allgemeingültigen Bewertungsprinzipien für jedes Wirtschaftssubjekt gelten. Sie ermöglichen dem Drittbeobachter Aussagen über die individuelle Beurteilung von Teilmengen des gesamten Güterraums. Das Ergebnis einer solchen Einbeziehung ist die elementare individuelle Nutzenfunktion bei Ungewißheit, in der alle objektiven Risikomaßstäbe verarbeitet sind, die konsistent mit rationalem Verhalten sind.

Daß Risiko objektiv nicht meßbar ist, ist letztlich der Grund dafür, daß Güter bei Ungewißheit auch anhand ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten unterschieden werden müssen.

1.1.6 Arten der Ungewißheit[1)]

Unabhängig von der speziellen Form (d.h. unabhängig von den Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung) lassen sich im Bereich wirtschaftlicher Entscheidungen grundsätzlich zwei Arten der Ungewißheit unterscheiden, die im folgenden kurz charakterisiert werden sollen:[2)]

- Ungewißheit bezüglich der Aktionsergebnisse infolge exogener Einwirkungen, allgemein als unbeeinflußbare Ungewißheit über die Höhe der Anfangsbestände und deren Veränderung im Zeitverlauf zu charakterisieren (parametrische Ungewißheit).
- Ungewißheit, die nur im Zusammenhang mit Handelsbeziehungen hervorgerufen wird (Transaktionsungewißheit).

Parametrische Ungewißheit

Solche tritt im Produktionsbereich bei gegebenem Faktoreinsatz und gegebener Technologie auf (z.B. unterschiedliche Ernteergebnisse) bzw. resultiert dort aus der Unvorhersehbarkeit des technischen Fortschritts.

Für die Haushalte bestehen[3)] unvermeidbare = exogen bedingte Schwankungen ihrer Rahmenbedingungen, unter denen sie planen, also Ungewißheit über die Entwicklung ihrer Güter- und sonstigen Vermögensbestände im Zeitverlauf.[4)]

---

1) Vgl. hierzu auch die Abschnitte 1.2.2.2, 1.2.2.5 und 1.2.3.2.

2) Vgl. hierzu J.E. Meade (1971), S. 149 ff., sowie J. Hirshleifer (1970), S. 243.
Meade unterscheidet zwischen 'environmental uncertainty' und 'market uncertainty', Hirshleifer zwischen 'productive uncertainty' und 'transactions uncertainty'.
Vgl. auch R. Radner (1968), S. 35 f.

3) Einmal abgesehen von der Instabilität der Präferenzen im Zeitverlauf. Vgl. hierzu S. 8, FN 2.

4) Das Problem der letztlichen Ungewißheit über den Planungshorizont sei hier ausgeklammert. Vgl. hierzu allgemein: J.H. Drèze (1972), S. 14, sowie speziell z.B. N.H. Hakansson (1969).

Die Ungewißheit bezüglich der Anfangsbestände der Haushalte beruht zum großen Teil auf der Ungewißheit ihrer Einkommen (als personelle Verteilung der ungewissen Produktion). Vorgegebene Produktionsungewißheit kann somit bei gegebener personeller Einkommensverteilung als ungewisse Anfangsausstattung der Haushalte interpretiert werden. Vgl. hierzu auch Abschn. 2.2.1.1 . Daneben besteht die Möglichkeit unbeeinflußbarer Vermögensschwankungen. Diese resultieren - abgesehen von interpersonellen Vermögenstransfers - in der Hauptsache aus Änderungen in der Erwartung, die künftigen Vermögenserträge betreffend.

Parametrische Ungewißheit ist unabhängig von der Möglichkeit des Tauschs. Sie ist unvermeidbar. Solche Ungewißheit ist bestenfalls meßbar, und zwar derart, daß jeder möglichen Ausprägung der ungewissen Größe eine Eintrittswahrscheinlichkeit (ein Zustand) zuordenbar ist. So ist sie dann in den individuellen Planungen als vorgegeben hinzunehmen. Unbeeinflußbarkeit der Ungewißheit bedeutet im allgemeinen jedoch nicht die Unmöglichkeit des interpersonellen Austauschs vorgegebener ungewisser Bestände. Soweit im Planungszeitpunkt diesbezügliche Märkte bestehen, können die individuellen zeitlichen Abfolgen an ungewissen Anfangsbeständen umstrukturiert werden. So ist grundsätzlich eine Planung 'ein für alle Mal' - also ohne spätere Revision - denkbar: Jedes Wirtschaftssubjekt kontrahiert innerhalb seiner Budgetbeschränkung für jede der ihm für die Zukunft vorgegebenen ungewissen Situationen schon im Planungszeitpunkt die präferierten Gütermengen (im traditionellen Sinn). Dieses Konzept entspricht einem vollständigen System von Terminmärkten unter Einbeziehung von Ungewißheit,[1)] was bedeutet, daß keinerlei Handelsungewißheit auftritt, insbesondere ist die

---

1) Bei J.E. Meade (1971), S. 163 ff. wird dieses System der 'conditional forward markets' ausführlich und anschaulich behandelt. Es entspricht dem in Abschn. 1.2.2.2, insb. S. 23 ff., dargestellten System der vollständigen Märkte.

Ungewißheit bezüglich der Nachfrage ausgeschlossen. Alle gewünschten Kontrakte werden (im Gleichgewicht) zu heute herrschenden Preisen 'sicher' abgeschlossen, d.h. Leistung und Gegenleistung sind garantiert, ungewiß ist nur, ob die Bedingung, an die die Vertragserfüllung geknüpft ist, eintritt.

Transaktionsungewißheit

Nun existieren in der Realität nur begrenzte Möglichkeiten des Tauschs künftiger ungewisser Bestände, und zwar dann, wenn diese nicht objektivierbar (= meßbar) und daher im voraus nicht vollkommen handelbar sind. (Im folgenden wird zur Kennzeichnung dieser Situation stets der Grenzfall 'nicht handelbar' angenommen.) Es können zwei Gründe dafür unterschieden werden, daß es für ungewisse Ergebnisse keine Märkte gibt.[1)]

Einmal kann die Kenntnis künftiger individueller Güterbestände einschließlich der Bedingung des Eintritts für alle potentiellen Vertragspartner mit zu hohen Informationskosten verbunden sein (prohibitive Transaktionskosten).

Zum anderen besteht das Problem des sog. moral hazard. Der Begriff 'moral hazard' umschreibt alle Fälle, in denen das Vertragsobjekt auch nach Vertragsabschluß weiterhin unter Kontrolle des Anbieters bleibt, so daß dieser nicht daran gehindert werden kann, die 'Ungewißheit', die er verkauft hat, nun absichtlich oder fahrlässig zum Nachteil des Käufers zu beeinflussen bzw. in denen der Anbieter sich nicht von diesem Verdacht, wenn ihn der Käufer haben sollte,

---

1) Siehe hierzu auch R. Radner (1970), S. 457.

befreien kann.[1)]
Die zusätzliche Ungewißheit, die so aus der Unmöglichkeit, den Kontraktinhalt festzulegen, entsteht, äußert sich in dem Fehlen der betreffenden Märkte.
So sind im Zeitpunkt einer Planung, die mehrere Perioden betrifft, nur Teile des Plans realisierbar, während im übrigen der sukzessive Abbau der Ungewißheit (und damit der Transaktionskosten) durch den Ablauf der Zeit abgewartet werden muß: Durch die schließliche Konkretisierung eines (heute noch) ungewissen Zustandes fallen die gerade aufgeführten Handelshindernisse weg und es besteht dann insoweit die Möglichkeit und das Bedürfnis eines erneuten Tausches von Gegenwarts - und künftigen ungewissen Gütern. Daraus resultiert die jeweilige Wiedereröffnung der Kassa- und Kreditmärkte. Ein solches System der zeitlichen Abfolge von Märkten (sog. Marktfolgensystem[2)]) stellt nun seinerseits wiederum eine veränderte Konstellation der Ungewißheit dar, die schon im Ausgangspunkt von den Planungseinheiten zu berücksichtigen ist:[3)]

---

1) Zum Problem des moral hazard vgl. K.J. Arrow (1970), insb. S. 202 ff., sowie 220 ff., außerdem M.V. Pauly (1968).
Reale Auswirkungen des moral hazard sind jede Möglichkeit des Versicherungsbetrugs, sowie die Beobachtung, daß künftige Arbeitseinkommen (human capital) im allgemeinen nicht zeitlich vorgezogen gehandelt werden. Auf der einen Seite besteht die Möglichkeit und auf der anderen Seite der Verdacht der negativen Beeinflussung der Arbeitsleistung durch solch längerfristige Verträge. Auszuschließen wäre eine solche Beeinflussung nur durch eine hohe Moral und das Vertrauen in diese (vgl. K.J. Arrow, (1970), S. 221) oder durch ein Leistungskontrollsystem, dessen Erfolgschancen wegen mangelnder objektiver Beurteilungskriterien und der damit verbundenen Einschränkung der individuellen Handlungsfreiheit auf längere Sicht als äußerst zweifelhaft zu beurteilen sind. Das Problem des moral hazard bei längerfristigen Arbeitsverträgen scheint zu entfallen, wenn die Entlohnung Gewinnbeteiligung an der Unternehmung ist, in der die Arbeitsleistung eingesetzt wird. Dieses Argument würde jedoch nur gelten bei einer anderen Beschränkung der Freiheit, nämlich derjenigen, nicht kurzfristig den Arbeitsplatz wechseln zu können, indem man sich durch Stellung eines (homogenen) Ersatzes freikauft. Ohne diese Beschränkung wäre automatisch wieder moral hazard im Spiel. So ist also Nichthandelbarkeit von human capital zu vermuten. Vgl. hierzu auch Abschn. 1.2.2.2.
2) Vgl. S. 30 ff.
3) Siehe hierzu R. Radner (1968), S. 35.

Die Existenz künftiger Kassa- und Kreditmärkte (neben Terminmärkten bzw. ohne diese) bringt zur Produktions- bzw. ex ante Bestandsungewißheit, die Preisungewißheit hinzu: die oben geschilderte Transaktionsungewißheit wird in Preisungewißheit transformiert.[1] Die Preisungewißheit wirkt sich in der Ungewißheit über die individuelle Budgetgleichung aus (vgl. hierzu Abschn. 1.2.2.3, S.38f) und bedeutet so letztlich auch wieder Mengenungewißheit für die individuelle Planung. (Die Gültigkeit einer bestimmten Budgetbeschränkung hängt von dem Eintritt eines bestimmten Zustandes ab, ist also im Ungewißheitsfall mit einer bestimmten Eintrittswahrscheinlichkeit ausgestattet.)

Die Transaktionsungewißheit ist zwar theoretisch grundsätzlich vermeidbar durch die Annahme eines entsprechenden Marktsystems, jedoch in der Realität wohl nie zu umgehen. Entscheidungen in Marktfolgensystemen fallen im allgemeinen anders aus als in einem entsprechenden vollständigen System (vgl. auch Abschn. 1.2.2.2, insb. S.33f).Dies bedeutet, daß Modelle, die die ungewisse Realität umfassend erklären wollen, dazu nur geeignet sind, wenn sie beide Formen der Ungewißheit abbilden. Soweit eine Problemstellung im Rahmen der Ungewißheit in einem einperiodigen Modell behandelt wird - wie dies in der vorliegenden Untersuchung beabsichtigt ist - bedeutet dies, daß Preisungewißheit vernachlässigt wird.[2] Transaktionsungewißheit wird in diesem Einperiodenfall dadurch berücksichtigt, daß bestimmte ungewisse Ansprüche auch im Fall $T = 1$ als nicht handelbar angenommen werden können, bzw. dadurch, daß nur Wahrscheinlichkeitsverteilungen gehandelt werden, d.h. die Gesamtheit aller alternativ möglichen

---

1) Je nachdem, welches Produktionsergebnis und welche Bestände realisiert werden,fallen dann jeweils Angebot und Nachfrage auf den wiedereröffneten Märkten aus.

2) Die Annahmen, unter denen die Äquivalenz zwischen einer einperiodigen Wirtschaft, in der alle Märkte nur im Planungszeitpunkt geöffnet sind und einer solchen, in der am Ende der Planungsperiode die Märkte nochmals geöffnet werden, untersucht K.J. Arrow (1964). Vgl. hierzu auch Abschn. 1.2.3.2.

Ergebnisse aus einer Aktion wird personell übertragbar gemacht, ohne nach Alternativen aufzuspalten (Beispiel: Aktie)[1].

1.2 Theorie des Haushalts bei Ungewißheit - das Arrow-Debreu-Modell

1.2.1 Einordnen der Theorie

Die traditionelle, auf Walras (1874) basierende mikroökonomische Theorie erklärt das Zustandekommen und die Bestimmungsfaktoren der individuellen Gleichgewichtsentscheidungen über Angebot und Nachfrage, Güter im wirtschaftlichen Sinne betreffend[2] für den Sicherheitsfall. Dabei werden N Gütermerkmale unterschieden. Diese sind so allgemein gehalten, daß jede Eigenschaft angesprochen sein kann. Jedoch werden die Besonderheiten der Zeit- und Ungewißheitskomponenten nicht berücksichtigt.

I. Fisher (1930)[3] erweitert die Walras'sche Güterwelt um die Dimension der Zeit. Er erklärt so das Spar- und Investitionsverhalten rational handelnder Wirtschaftssubjekte unter der Annahme vollständiger Gewißheit[4] über den Zustand der Wirtschaft innerhalb des Planungszeitraums.

K.J. Arrow (1953)[5] berücksichtigt erstmals die Ungewißheit

---

1) Meade behandelt diese grundsätzliche Möglichkeit unter dem Begriff 'residual uncertainty', vgl. J.R. Meade (1971), S. 283 ff. . Vgl. hierzu auch Abschn. 1.2.3.2, S. 62.

2) Vgl. z.B. J.M. Henderson and R.E. Quandt (1971), sowie R. Richter (1970)

3) Vgl. auch J. Hirshleifer (1965)

4) Soweit diese für die Entscheidungen von Bedeutung ist, d.h. Kenntnis der eigenen Präferenzen und des individuellen Möglichkeitsbereichs, damit insbesondere Voraussehbarkeit der Entwicklung des individuellen Einkommens, des technischen Wissens und der Preise sämtlicher Güter.

5) K.J. Arrow (1953, 1964), Zitationen in der vorliegenden Arbeit beziehen sich stets auf die englische Übersetzung. Vgl. auch Abschn. 1.2.3.2

bei der Abgrenzung der Güter im Walras-Modell, allerdings unter Vernachlässigung des Zeitaspekts. Die - inzwischen schon klassische - Synthese dieser Ansätze vollzieht G. Debreu (1959)[1]: Er bezieht die subjektive Ungewißheit im bezug auf das, was sein wird, in das Entscheidungsmodell mit ein, und zwar wie folgt: Güter werden nach materiellen Merkmalen, nach dem Zeitpunkt und nach dem Zustand der Umwelt, in dem sie dem Wirtschaftssubjekt zur Verfügung stehen, gegeneinander abgegrenzt. Diese letzte Unterscheidung ist dann sinnvoll, wenn nicht jedem Zeitpunkt eindeutig ein Zustand zugeordnet ist[2] und wenn mindestens ein Wirtschaftssubjekt die Unterscheidung der Zustände für entscheidungsrelevant hält.

Die folgende Darstellung der Entscheidung unter Ungewißheit anhand des Konzepts der zustandsabhängigen Güter ('Arrow-Debreu-Modell', kurz 'A-D-Modell') ist selektiv im Hinblick auf die beabsichtigte Anwendung. Allgemein beginnend, beschränkt sie sich dann auf den Fall einperiodiger Planung für ein Gut bei vorgegebener Produktionsentscheidung (Fall der reinen Tauschwirtschaft).

1.2.2 Darstellung des Arrow-Debreu-Modells[3]

1.2.2.1 Der Güterraum

Gegenstand der Entscheidung unter Ungewißheit sind Vektoren des K-dimensionalen Güterraums

$$X = \left\{ x \,\middle|\, x = (\xi_{o}, \xi_{11}, \ldots, \xi_{ts}, \ldots, \xi_{TS}), \xi_{ts} \geq 0 \right\} = R_{+}^{K} \qquad \begin{array}{l} t=0,\ldots,T \\ s=1,\ldots,S \\ K=1+TS. \end{array}$$

---

1) G. Debreu (1959), insb. S. 98 ff.

2) Dies ist gerade die Umschreibung der Ungewißheit. Vgl. hierzu auch die allgemeinen Überlegungen in Abschn. 1.1.2, S. 4f.

3) Zur Darstellung vgl. K.J. Arrow (1964), G. Debreu (1959), zur Einordnung, Erläuterung und Wertung, J.H. Drèze (1974). Eine vereinfachende und ausführliche Einführung gibt J. Hirshleifer (1965, 1966) und darauf aufbauend (1970), S. 215 ff.

Dabei bezeichnet der Einheitsvektor $e_k \in R_+^K$ die Einheit des Gutes k.

Zum Ausmaß der Gütermerkmale (K) läßt sich konkret folgendes überlegen:

Die Unterscheidung von Qualitätsmerkmalen wird im vorliegenden Zusammenhang der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets vernachlässigt (Annahme eines Standardgutes). Dies wird gerechtfertigt durch die Überlegungen von Arrow.[1)]

Im Planungszeitraum werden S alternative Zustände in T+1 Teilperioden unterschieden. Dabei wird die vereinfachende Annahme der Konzentration der Aktivitäten in den Zeitpunkten t = 0,...,T getroffen.

Eine besondere Überlegung erfordert die Ermittlung von S.[2)]

In einer Teilperiode t - hier also in einem Zeitpunkt - sind S_t [3)] alternative Zustände s_t möglich, denen die Wirtschaftssubjekte subjektive Wahrscheinlichkeiten π_{s_t} zuordnen mit $\sum_{s} \pi_{s_t} = 1$ für alle t.

Die Anzahl der Zustände - S - ist die maximale Anzahl der unterschiedlichen Ergebnisse bezüglich der Mengen des Standardgutes, die mindestens für ein t unterschieden werden.

Eine Sonderstellung nimmt der Zeitpunkt t = 0 ein. Heute gibt es nur einen - den herrschenden - Zustand. Deshalb gibt es nur ein Gegenwartsgut.

Welche Zustände für jedes t>0 unterschieden werden, hängt ab von der Anzahl der alternativ möglichen Ergebnisfolgen (Sequenzen) für den gesamten Planungszeitraum.[4)]

---

1) K.J. Arrow (1964), vgl. hierzu auch Abschn. 1.2.3.2, S. 60 ff., insb. S. 64 .

2) Vgl. hierzu auch J. Hirshleifer (1970), S. 235 f.

3) Man stelle sich S_t alternative individuelle Anfangsbestände für das Standardgut im Zeitpunkt vor als Folge aus S_{t-1} alternativen Beständen ebenfalls für das Standardgut im Zeitpunkt t-1 (z.B. Lagerhaltung). S_t läßt sich ermitteln als $S_t = S_t' \cdot S_{t-1}$, wenn aus jedem Anfangsbestand in t-1 jeweils S_t' alternativ mögliche Anfangsbestände in t resultieren.

4) "If there are N distinct sequences, we can think of there being N states at each given date;...", J. Hirshleifer (1970), S. 235.

Nehmen wir an, daß der Haushalt im Zeitpunkt t=0 für einen Planungshorizont T>1[1] entscheidet, während die zugehörigen Aktionen[2] an spätere Zeitpunkte gebunden sind. Dann ist als Ergebnis jeder gegenwärtig möglichen Aktion eine zeitliche Abfolge von Variablen zu bewerten, unabhängig von der Sicherheit[3] oder Ungewißheit der Ergebnisse je Zeitpunkt. Entscheidend ist die Annahme, daß im ungünstigsten Fall die endgültige Wahl bezüglich der zeitpunktabhängigen Komponenten des Verbrauchsplans jeweils erst in der zugehörigen Vorperiode getroffen werden kann. Bei Ungewißheit ergeben sich als mögliche Kombinationen ungewisse Sequenzen - hier ungewisse Konsumfolgen - bestehend aus T zufallsverteilten Zeitkomponenten (T-dimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung).
Im folgenden wird unter vereinfachenden Annahmen die Anzahl S der je Zeitpunkt zu unterscheidenden Zustände[4] ermittelt.

---

1) Für den Fall T=1 hat jede Aktion in t=0 nur ein (ungewisses) Ergebnis. Es gibt dann nur eine Zufallsvariable, die (in Verbindung mit dem gegenwärtigen Verbrauch) zu bewerten ist, woraus S≥1 alternative Ergebnisse in T=1 resultieren.

2) Zum Inhalt des Begriffs 'Aktion' vgl. Abschn. 1.1.3, insb. S. 5 f.

3) In diesem Fall gehört die Fragestellung in den Problemkreis der dynamischen Programmierung. Vgl. z.B. R. Bellman (1957). Vgl. auch S. 34, FN 2.

4) Die Zustände im Zeitpunkt t werden nicht per se unterschieden, z.B. 'schönes Wetter' oder 'schlechtes Wetter'. Es kommt vielmehr darauf an, daß der Bestand des Standardgutes im Zeitpunkt t exogen variieren wird, z.B. je nachdem, ob in diesem Zeitpunkt schönes oder schlechtes Wetter herrscht. So wird das Wirtschaftssubjekt s=1 (schönes Wetter) und s=2 (schlechtes Wetter) unterscheiden. Hierbei interessieren allein die Eintrittswahrscheinlichkeiten für s=1 und s=2. Genau genommen wird unterschieden zwischen dem Gut mit der Eintrittswahrscheinlichkeit π_{t1} (Gut t1) und demjenigen mit der Eintrittswahrscheinlichkeit π_{t2} (Gut t2). Daß diese Wahrscheinlichkeiten an bestimmte Zustände geknüpft sind, also mit deren Namen umschrieben werden können, ist nur indirekt von Bedeutung. Die Güterein-teilung wäre genau dieselbe, wenn die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung künstlich erzeugt, bzw. zu anderen Umweltereignissen gehören würde. (In diesem Zusammenhang ist auch das Eindeutigkeitsaxiom zu sehen, vgl. Absch. 1.2.2.4, S. 46 ff.) Es kann jedoch vorteilhaft sein, Zustände zu umschreiben, um die Möglichkeit der Veränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht zu übersehen. Dies darf jedoch nicht, - um es noch einmal zu betonen - zu der Annahme verleiten, daß irgendwelche anderen Eigenschaften eines so beschriebenen Zustandes als eben seine Wahrscheinlichkeit für die Güterbeurteilung eine Rolle spielten.

Sei S'_t gleich der Anzahl der alternativ möglichen Ergebnisse im Zeitpunkt t aus einer Aktion in t-1. Dabei wird der Einfachheit halber angenommen, daß S'_t unabhängig von der Ausgangssituation in t-1 ist. Die Anzahl S_t der in t zu unterscheidenden Zustände ist gleich der Anzahl der bis zum Zeitpunkt t alternativ möglichen Kombinationen von Zustandsabfolgen $(s_1,\ldots,s_t)$, also

$$S_t = S'_t \cdot \ldots \cdot S'_{t-1} \cdot S'_t \quad .^{1)}$$

Für den Spezialfall $S'_t = S'$ für alle t errechnet sich

$$S_t = (S')^t \quad .$$

Für die Zahl der Sequenzen = Zahl der maximal möglichen Zustände für einen vorgegebenen Zeitraum und damit für die Anzahl der für einen Zeitpunkt t, $1 \leq t \leq T$, zu unterscheidenden Gütermerkmale "Zustand" ergibt sich

$$S = \max \left\{S_t,\ t = 1,\ldots,T\right\} = S_T .^{2)}$$

Die Eintrittswahrscheinlichkeit π_s eines Zustandes s,[3)] s=1,...,S, ist allgemein gleich dem Produkt der bedingten Wahrscheinlichkeiten $\pi_{s_t} = \pi_{s_t}(s_1,\ldots,s_{t-1})$. π_{s_t} ist die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Zustands s im Zeitpunkt t unter der Voraussetzung, daß in allen $t' < t$ die Zustände s_t, realisiert wurden, die zu der durch s gekennzeichneten Zustandsabfolge gehören.

Unter der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit für die s_t gilt

$$\pi_s = \pi_{s_T} \cdot \ldots \cdot \pi_{s_1} \quad ,^{4)}$$

---

1) In diesem Zusammenhang ist der Begriff der Sequenzen zu sehen. Eine Sequenz s für den Zeitraum T ordnet einer bestimmten Zustandsabfolge $(s_1,\ldots,s_t)$ eine Mengenabfolge zu, siehe z.B. J. Hirshleifer (1970, S. 235). Die Eintrittswahrscheinlichkeit einer Sequenz wird mit π_s bezeichnet, wobei s diejenige natürliche Zahl ist, die der Zustandsabfolge $(s_1,\ldots,s_T)$ zugeordnet ist. Es gibt soviele unterschiedliche Sequenzen, wie es verschiedene Kombinationen von Zustandsabfolgen im gesamten Zeitraum T gibt.

2) Vgl. FN 4, S. 18.

3) Bzw. der entsprechenden Sequenz.

4) Vgl. z.B. E. Kreyszig (1965), S. 150.

wobei π_{s_t} die unbedingte Eintrittswahrscheinlichkeit kennzeichnet.

Eine Ausweitung der Güterdimension auf das $S_T$fache ist hinreichend für eine vollständige Erfassung der Argumente der Nutzenfunktion bei Ungewißheit; sie ist notwendig bei der generellen Interdependenz der Zustände im Zeitverlauf. Letzteres ist aus den Bedingungen innerhalb des Produktionsbereichs wohl in der Regel anzunehmen.

Damit ist das Ergebnis bezüglich der Dimension des Güterraums bei Ungewißheit:

$$K = 1 + TS$$

wegen der Vereinfachung N=1. Die Menge der im A-D-Modell zu unterscheidenden Güter ist gekennzeichnet durch die der Einheitsvektoren im K-dimensionalen Vektorraum. Jede Güterkombination, so z.B. der Anfangsbestand oder der Verbrauchsplan eines Haushalts oder auch der Produktionsplan einer Unternehmung, ist ein Element x aus dem Güterraum X.

Zeitpunkt-zustandsabhängige Gütervektoren werden allgemein auch Zeit-Zustandsansprüche (time-state claims) - kurz Ansprüche - genannt. Speziell die Einheitsvektoren (Güter) werden auch als Elementaransprüche (elementary claims) bezeichnet.[1)]

1.2.2.2 Marktsysteme

Titel

Sind Ansprüche $x \in X$ Handelsobjekte, werden sie handelbare Ansprüche oder Titel genannt.[2)] Die Möglichkeit von Handel - Existenz eines Marktes - bedeutet, daß Nachfrage und Angebot bezüglich eines Anspruchs (allgemein: bezüglich eines Gutes) bei Vorhandensein von Austauschrelationen (Preisen) bezüglich eines anderen Anspruchs (Gutes) im Prinzip realisiert wer-

1) Vgl. z.B. J. Hirshleifer (1970), S. 231.

2) 'securities' oder 'tradable assets', vgl. z.B. J. Hirshleifer (1970), S. 216.

den können.[1)]

Die Menge der handelbaren Ansprüche oder Titel a_j bildet das Marktsystem $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \{a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_{K'}\} \subseteq X \quad ,$$

wobei gilt

$$a_j \in X;\ K' \leq K;\ a_i, a_j \text{ linear unabhängig für alle } i \neq j, i,j \in \{1,\ldots,K'\} .$$

Der zu einem Marktsystem $\mathcal{A}$ gehörende Preisvektor $p_{\mathcal{A}}=(p_1,\ldots,p_{K'})$ gibt die Austauschrelationen der in A enthaltenen Titel untereinander an. Die Komponente p_j bezeichnet nominal die für eine Einheit des Titels a_j als Gegenleistung zu erbringenden Geldeinheiten, bzw. real die Mengeneinheiten des als Geld fungierenden Titels. In der vorliegenden Arbeit sollen die Komponenten eines beliebigen Preisvektors $p_{\mathcal{A}}$ stets in Einheiten des Gegenwartsgutes ausgedrückt werden, womit implizit angenommen wird, daß stets $x=(\xi_o,o,.,o), \xi_o > 0, x \in \mathcal{A}$ gilt. $p_{\mathcal{A}}$ bezeichnet dann den Vektor der relativen Preise

$$p_{\mathcal{A}} = (1,p_2,\ldots,p_{K'}) \quad .$$

Der Kauf bzw. Verkauf von α_j Einheiten des Titels $a_j = (0,\ldots,\xi_{tsj},\ldots,0)$, $t>0$, bedeutet, daß z.B. in $t=0$ ein Vertrag folgendermaßen abgeschlossen wird: Nur falls im Zeitpunkt t der Zustand s eintritt, ist die Gütermenge $\alpha_j \cdot \xi_{tsj}$ (im traditionellen Sinne) zu liefern bzw. abzunehmen. Die Gegenleistung $p_j \cdot \alpha_j$ - gemessen in Einheiten des Gegenwartsgutes - ist in jedem Fall zu erbringen. Gegenstand des Handelsvertrages ist also eine bestimmte Menge eines Gutes mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit der Erfüllung versehen bzw. ungewisse Güterkombinationen oder ganz allgemein Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Gütermengen.

Ist $a_j = (0,\ldots,0,\xi_{kj},0,\ldots,0)$ mit $\xi_{kj} > 0$, $k \in \{1,\ldots,K\}$ für alle j, $j=1,\ldots,K'$ dann heißt $\mathcal{A}$ elementares Marktsystem oder

---

1) Allgemein zum Begriff des Marktes vgl. R. Richter (1970), S. 11.
Im Sicherheitsfall wird die Unterscheidung zwischen den Begriffen 'Gut' und 'Handelsobjekt' im Zusammenhang mit derjenigen zwischen privaten und öffentlichen Gütern relevant.

kurz Elementarsystem. Die Einheit eines Elementartitels ist der Einheitsvektor $e_j = (0,\ldots,0,\xi_j,0,\ldots,0) \in X$ mit $\xi_j = 1$, $j \in \{1,\ldots,K'\}$.

Der Elementartitel entspricht also dem traditionellen Begriff des Gutes im wirtschaftlichen Sinn.[1] Der Preis eines Elementartitels e_j wird mit ϕ_j, der Preisvektor eines Elementarsystems mit

$$\phi = (1,\phi_2,\ldots,\phi_{K'})$$

bezeichnet.

Im übrigen spricht man von (kombinierten) Titeln. Titel besonderer Art sind die assets,[2] sie betreffen ganze vorgegebene Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Beliebige Titel lassen sich - unter der Prämisse handelbarer Elementaransprüche - linear aus den Elementartiteln zusammensetzen. Umgekehrt sind kombinierte Tiel in der subjektiven Wahrnehmung stets in Elementaransprüche aufspaltbar,[3] was für die Konstruktion der Nutzenfunktion (vgl. Abschn. 12.2.4) grundlegend ist.

Es gilt stets

$$a_j = \sum_k \xi_{kj}\, e_k,\quad a_j = (\xi_{kj}) \in \mathcal{A}$$

und damit fürd ie Einheiten ξ_k des mit α_j Einheiten der a_j indirekt gehandelten Elementaranspruchs e_k

$$\xi_k = \sum_j \xi_{kj} \cdot \alpha_j \quad , \quad a_j \in \mathcal{A} \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad .$$

Vollständiges System

Das Marktsystem $\mathcal{A}$ heißt vollständig bezüglich des K-dimensionalen Güterraums, wenn

$$K' = K$$

gilt, die Menge der a_j also eine Basis im $\mathbb{R}^K$ bildet.

---

1) Bzw. dem des Handelsobjekts für den Sicherheitsfall.

2) Wir folgen bei der Begriffsbildung S. Fischer (1972), S. 370, sowie J.E. Meade (1971), vgl. dort insb. S. 295 ("... assets as a safeguard against residual uncertainty,") im Gegensatz zu Hirshleifer, der ganz allgemein kombinierte Ansprüche als assets bezeichnet, vgl. J. Hirshleifer (1970), S. 216.

3) Im Hinblick auf die Realität erscheint dies wichtiger.

Insbesondere spricht man im Fall von K linear unabhängigen Elementartiteln von einem vollständigen Elementarsystem. Das Marktsystem ist vollständig in dem Sinn, daß alle denkbaren Ansprüche im Prinzip erreichbar sind (vgl. auch den nachfolgenden Abschn. 1.2.2.3).
Zwei Marktsysteme heißen einander äquivalent, wenn die Menge der durch sie realisierbaren Gütervektoren dieselbe ist.[1)]

Satz 1/1: Alle bezüglich eines Güterraums vollständigen Marktsysteme sind - Vollkommenheit der Märkte vorausgesetzt - einander äquivalent.

Der Beweis des Satzes - eine Anwendung eines elementaren Satzes aus der Linearen Algebra - wird im Anhang A dargestellt und erläutert.

Folgerung:
Existieren zusätzlich zum vollständigen Elementarsystem Märkte für kombinierte Titel, so hebt die Möglichkeit von Gewinnen durch Arbitrage Preisunterschiede auf. Dies ist gleichbedeutend damit, daß in den Elementarmärkten alle individuellen Mengenplanungen erfaßt sind. Darüber hinaus sind Nachfrage und Angebot nicht determiniert. Anders ausgedrückt: Redundante Titelmärkte sind aufspaltbar in Teilmärkte, deren Angebot und Nachfrage den entsprechenden Elementarmärkten zuzurechnen sind. Zur Kennzeichnung eines vollständigen Systems genügt also die Annahme von K Elementarmärkten mit dem Preisvektor ϕ.[2)]
Im vollständigen System hat dann ein beliebiger Titel $a_j = (\xi_{kj}) \in X$ als Linearkombination von Elementaransprüchen den Preis

$$p_j = \sum_{k=0}^{k} \xi_{kj} \phi_k \quad .$$

Soll z.B. für einen bestimmten Zeitpunkt eine Menge γ (des Standardgutes) sicher eingetauscht werden, so ist Gegenstand

---

1) d.h. wenn ihre Zulässigkeitsbereiche die gleichen sind. Vgl. hierzu S.35.

2) Zu den Annahmen, unter denen für K Märkte im K-dimensionalen Güterraum K Gleichgewichtspreise existieren, vgl. G. Debreu (1959).

des Handels der kombinierte Titel c_t ,

$$c_t = (0,\ldots,0,\xi_{t1},\ldots,\xi_{tS},0,\ldots,0) \text{ mit } \xi_{ts} = 1, s=1,\ldots,S.$$

Mit γ Einheiten von c_t wird die Menge γ des Standardgutes unabhängig von dem in t realisierten Zustand garantiert (sicherer Titel).
c_t hat den Preis

$$p_{c_t} = \sum_s \phi_{ts} \quad ^{1)}$$

unter der Annahme, daß für alle e_k , $k = t1,\ldots,tS$ ein Markt existiert.

Beschränktes (vollständiges) System[2] - Asset als Handelsobjekte

Ein Marktsystem $\mathcal{A} = \{a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_{K'}\}$ heißt beschränkt (vollständig), wenn gilt

$$K' < K$$

und

$$\sum_{j=1}^{K'} a_j > 0 \quad .$$

Letzteres bedeutet, daß $\sum_{j=1}^{K'} \xi_{kj} > 0$ und damit $\xi_{kj} > 0$, für mindestens ein j, $j \in \{1,\ldots,K\}$ für alle $k \in \{1,\ldots,K\}$.
Im beschränkten (vollständigen) Marktsystem werden zwar alle Komponenten des K-dimensionalen Güterraums gehandelt, jedoch nur in bestimmten Linearkombinationen, deren linear unabhängige Anzahl kleiner ist als die maximale Zahl der zu unterscheidenden Zustände. Bezüglich der Dimension des Güterraums und der Eintrittswahrscheinlichkeit der Zustände gilt das unter der Überschrift 'Vollständiges System' Erwähnte.

---

1) Interpretation aus heutiger Sicht: Eine heutige Gütereinheit bringt - bis Periode t festverzinslich angelegt - die sichere Realverzinsung

$$\rho_t = \frac{1}{\sum_s \phi_{ts}}$$

2) J. Hirshleifer spricht in diesem Zusammenhang von 'incomplete markets', (1970), S. 264. Wir schließen uns hier jedoch dem von Fischer verwendeten Begriff, 'constrained contingent commodity model', an (S. Fischer (1972), S. 371). Zu der Verwendung des Begriffs des unvollständigen Marktsystems hier siehe S. 29 und S. 38.

Die formal einfachste Darstellung dieses theoretischen Sachverhaltes sowie eine geeignete Interpretation der Realität[1] ist der asset-Fall. Hierbei werden[2] ganze Wahrscheinlichkeitsverteilungen gehandelt, also Ansprüche, deren Komponenten den gesamten Güterraum betreffen. Die Bedeutung der assets - insbesondere im Zusammenhang mit den ungewissen Produktionsplänen der Unternehmungen - soll nun erläutert werden.

Ein Marktsystem, in dem zustandsbedingte Ansprüche gehandelt werden, ist in der Realität im allgemeinen nicht so ausgestaltet, daß Elementaransprüche Gegenstand der Tauschverträge sind (Ausnahme: Versicherungsgeschäfte). In der Realität sind die Transaktions- insbesondere die Informationskosten - bezüglich der Elementaransprüche beträchtlich, wenn nicht gar unendlich.[3]
Dies gilt insbesondere für die Nachfrager solcher Ansprüche bezüglich der Position der Anbieter, mit denen sie kontrahieren. Daneben besteht für beide Vertragsseiten die Gefahr, daß die Gegenseite den Eintritt des für sie günstigen Zustands - falls möglich - herbeizuführen sucht.[4]

---

1) Kompliziertere Zusammensetzungen sind denkbar, jedoch jeweils auf das einfache System reduzierbar. Vgl. hierzu auch die Vorstellung des Grundmodells, Abschn. 2.2.1 .

2) Vgl. S.15f.

3) Das A-D-Modell unter Einbeziehung der Informationskosten behandelt erstmals R. Radner (1968). Vgl. auch D. Foley (1970) und F.H. Hahn (1971), sowie neuerdings M. Kurz (1974), die allerdings den Sicherheitsfall untersuchen.

4) Ausführlicher hierzu unter dem Stichwort 'moral hazard', S. 13f.

Das A-D-Modell - wie bisher behandelt - abstrahiert von beiden Gesichtspunkten: Es wird angenommen,

- daß kein Wirtschaftssubjekt den Eintritt eines Zustandes beeinflussen kann[1] und
- daß jeder der Beteiligten seine Anfangsausstattung an Gütern in jedem künftigen Zustand genau kennt und sich darauf verlassen kann, daß auch alle seine (direkten und indirekten) Handelspartner die ihren kennen und sich außerdem konsistent verhalten, also im Rahmen ihres Budgets planen und nur dementsprechend kontrahieren.[2]

In dieser Modellwelt darf kein solches 'Risiko zweiten Grades' - um es einmal so zu nennen - enthalten sein. Es bietet sich beim Handel mit Elementaransprüchen für den Typ eines Spekulanten aber geradezu an. Daß ein Handelspartner bei Eintritt des Zustandes, der ihn zur Leistung verpflichtet, nicht liefern kann, ist möglicherweise die Folge falscher Einschätzung der eigenen Situation, bzw. derjenigen seiner Lieferanten. Es kann aber auch eine Spekulation auf den Nichteintritt des Zustandes vorliegen (was einer bewußten Falschdarstellung der eigenen Situation entspricht),[3] während die Gegenleistung erbracht wurde und im allgemeinen gegenstandslos geworden ist.[4]

Das hiermit entstehende Problem wird besonders sichtbar, wenn zu verschiedenen Zeitpunkten verfügbare Güter gegen-

---

1) Risiko ist in dem A-D-Modell ja gerade so definiert, daß es allein Ungewißheit bedeutet bezüglich des Zustandes, der in der Zukunft herrschen wird; Ausfallrisiko des Handelspartners ist damit ausgeschlossen, ebenso jegliche subjektive Beeinflußbarkeit der Zustände.

2) So ist auch das Verbot von Leerverkäufen zu sehen, das bestimmte Modelle mit Ungewißheit enthalten. Vgl. z.B. W.F. Sharpe (1964).

3) Die Versuchung hierzu besteht bei Ungewißheit viel eher als bei Gewißheit, denn 'es geht ja alles gut', solange nur nicht der Zustand eintritt, an den die Bedingung der Leistung geknüpft ist, gegen den man also spekuliert hat.

4) Nämlich dann, wenn sie die Abtretung eines anderen bedingten Anspruches betraf.

einander eingetauscht werden sollen.[1] Diese 'Risiken zweiten Grades' können in der Realität durch die Konstruktion bestimmter extremer Handelsobjekte - der zu Beginn des Abschnitts angesprochenen assets - umgangen werden.[2] Diese damit auch in der Theorie zu berücksichtigenden Titel sind in zweierlei Form zu gestalten:

- Die Leistung ist völlig unabhängig von dem eintretenden Zustand. Der Nachfrager trägt also keinerlei Risiko (Einführung eines 'sicheren asset', Bond genannt).
- Es wird über die gesamte Verteilung der Zustandsausstattungen eines Wirtschaftssubjekts abgeschlossen, und zwar über das Residualergebnis nach Abzug der gerade genannten sicheren Verpflichtungen. Hier trägt der Nachfrager das gesamte Risiko ('residualer asset', z.B. die Aktie).

Für beide Vertragstypen entfällt die Notwendigkeit der Identifikation eines Zustandes, sofern die Möglichkeit bzw. der lohnende Versuch der Beeinflussung der Zustände durch die Vertragspartner ausschließbar ist.[3] Durch Verwendung der beiden 'Assetformen' ist die Menge aller für das einzelne Wirtschaftssubjekt und für die gesamte Wirtschaft möglichen riskablen Güterangebotskombinationen grundsätzlich - moral hazard ausgeschlossen - erfaßbar, also jedes gegebene Risiko auf die Nachfrager verteilbar. Dies gilt umgekehrt jedoch

---

1) So argumentiert auch K.J. Arrow (1974a), S. 8: "... when the exchange of values for values is simultaneous or nearly so, the contracts may almost be selfenforcing. If a good has been sold and not paid for, it can be recovered; ... With contracts extending into the distant future, on the contrary, the possibility of failure to comply becomes greater...".

2) Vgl. auch die spezielle Form der Zweiteilung der ungewissen Geschäfte bei K.J. Arrow (1964), deren Konstruktion das Risiko des einseitigen Ausfalls ausschließt (Abschn. 1.2.3.2, S. 62 ff.).

3) Was in der Regel für den Handel mit Unternehmungsanteilen zutrifft, nicht jedoch im Fall von künftigen Ansprüchen auf Leistungen des Faktors Arbeit. Vgl. in diesem Zusammenhang auch S. 14, FN 1.

nicht für die Pläne der Nachfrager. Es besteht grundsätzlich die Möglichkeit, daß die K-elementigen Verbrauchspläne von den Gütervektoren abweichen, die mit Hilfe der gehandelten assets als Linearkombination realisiert werden können. Dies ist als Restriktion zu betrachten.

Unvollständiges Marktsystem

Ein Marktsystem $\mathcal{A} = \{a_j , j=1,\ldots,K'\}$ im A-D-Modell heißt unvollständig, wenn

$$K' < K$$

und

$$\mathcal{A} \subseteq U(\{e_1,\ldots,e_{K'}\}) = \{a_j \mid a_j = (\xi_{kj}) = \sum_k \xi_{kj} e_k ; e_k \in \{e_1,\ldots,e_{K'}\}, j=1,\ldots,K\}$$

$$=: U(\mathcal{A}) \quad .$$

Dabei bedeutet $U(\{e_1,\ldots,e_{K'}\})$ die Koordinatenhyperebene, die von den Einheitsvektoren $e_1,\ldots,e_{K'}$ aufgespannt wird.

Ein unvollständiges Marktsystem liegt also dann vor, wenn Komponenten des Güterraums existieren, die weder elementar noch in Kombination mit anderen Komponenten Handelsobjekt sind. Ein solches System setzt als notwendige Bedingung die Existenz nicht handelbarer Ansprüche voraus. Hinreichend[1] hierfür ist die Annahme von Ansprüchen, die unlösbar mit Personen verknüpft sind. Es wird nun gefragt, wie in einem theoretischen Modell, das der Norm und der Realität im wesentlichen gerecht werden soll, die Annahme der nicht handelbaren Ansprüche zu berücksichtigen ist. Die Überlegungen hierzu gelten unabhängig von der Zeitdimension.

Im vollständigen wie auch im beschränkten A-D-System ist dieser Sachverhalt so zu interpretieren, daß die vorhandenen starren Bestände in die Form der Zielfunktion eingehen. Bei

---

1) Im Hinblick auf die zu behandelnde Fragestellung interessiert nicht die exakte Charakterisierung eines unvollständigen Systems, sondern die Bedeutung nicht handelbarer Güter für die Anwendbarkeit des vollständigen, bzw. beschränkten A-D-Systems. Zu den Gründen für Nichthandelbarkeit vgl. Abschn. 1.1.6, S. 11 ff., sowie die nachfolgenden Überlegungen unter der Überschrift 'Marktfolgensystem', S. 30 ff.

Ungewißheit bezüglich der Bestände der nicht handelbaren Güter ist zu vermuten, daß die Nutzenfunktion über den Einfluß subjektiver Eintrittswahrscheinlichkeiten hinaus zustandsabhängig ist.[1)]
Weitere Modifikationen neben der der Zielfunktion sind - um die 'Starrheiten' bei der individuellen Entscheidung über den optimalen Verbrauchsplan unter Ungewißheit zu berücksichtigen - nicht erforderlich.

Die exogene Vorgabe bestimmter Bestandskomponenten ist als 'Umwelt' zu interpretieren und kann daher in Untersuchungen, die die Umwelteinflüsse konstant lassen, vernachlässigt werden.

Fragestellungen, die die (ungewissen) Bestände nicht gehandelter Ansprüche unberührt lassen - wie die vorliegende Untersuchung der wachstumsneutralen Umverteilung[2)] anhand eines einperiodigen Modells - erlauben deshalb die Anwendung des Instrumentariums des A-D-Modells ohne Berücksichtigung der nicht handelbaren Ansprüche.[3)]

Marktfolgensystem - Nichthandelbarkeit von human capital
Von den beschränkt handelbaren Ansprüchen und den nicht handelbaren Ansprüchen sind die nur in bestimmten Zeitpunkten handelbaren Ansprüche zu unterscheiden.[4)]
Auch solche Ansprüche lassen sich letztlich mit dem Phänomen der Transaktionsungewißheit begründen (vgl. S. 13). Die Transaktionskosten können so hoch sein, daß der Handel bestimmter Ansprüche in keiner Weise zeitlich vorgezogen möglich ist. Insbesondere kommen auch keine Terminmärkte für Residualansprüche (assets) bezüglich dieser ungewissen Güterverteilungen zustande. Es handelt sich dabei um diejenigen Ansprüche, die derart untrennbar an Personen geknüpft sind, daß erst im jeweiligen Zeitpunkt ihrer Realisation das Problem des moral hazard (und die damit verbundenen Kosten) hinfällig wird.

---

1) Vgl. hierzu insbesondere die Überlegungen im Zusammenhang mit dem Eindeutigkeitsaxiom, S. 46 ff.

2) Zum Inhalt des Begriffs vgl. S. 82 .

3) Das gilt trotz des Einwandes, daß "utilities (that) are not statedependent is just a special case", E.F. Fama (1970), S. 165, FN 7.

4) Die folgenden Überlegungen betreffen den Fall T > 1. Bezüglich T = 1 vgl. Abschn. 1.2.3.2 .

Hierzu gehören alle künftigen Ansprüche, den Faktor Arbeit im Mehrperiodenfall (human capital)[1] betreffend, wie Löhne aber z.B. auch Pensions- und Rentenansprüche.[2] Handel von human capital würde also letztlich den Handel aller künftigen im Menschen gebundenen Güterverteilungen gegen einen Gegenwartswert bedeuten. Die Möglichkeit solcher assets wäre gleich der Annahme eines Marktes für ungewisse 'Lebensarbeitsleistungen'. Ein vollkommener Markt für human capital wäre zu organisieren wie ein vollkommener Aktienmarkt, der die Residualgewinne der Unternehmungen kapitalisiert.[3] Vgl. hierzu die entsprechenden Annahmen des Kapitalmarktmodells, S. 168. Insbesondere müßte auch die Homogenität des Gutes 'künftige Arbeitsleistung' angenommen werden. Soweit diese nicht gegeben ist, stellt der Handel von human capital außerdem eine schwerwiegende Beeinträchtigung der persönlichen Freiheit dar, die mit den Grundsätzen herrschender Ethik unvereinbar sein kann. Dies gilt möglicherweise auch für die Form der notwendigen Kontrolle der vereinbarten Leistung.
Märkte für human capital werden also fehlen[4], solange die Kosten zur Vermeidung von moral hazard prohibitiv sind. Diese Feststellung widerspricht nicht der (in der Realität beobachtbaren) Möglichkeit der Kreditaufnahme (z.B. Kredite mit einer Laufzeit von mehr als einer Periode) gegen Rückzahlung aus künftigem ungewissem Einkommen aus Arbeit. Bei solchen Geschäften entfällt das Argument des moral hazard. Ein Kreditvertrag dieser Art verlangt 'allein' Konsistenz der Planung des Kreditnehmers im Rahmen der ungewissen Entwicklung seines Budgets im Zeitverlauf.[5] Eine derartige

---

1) Vgl. hierzu auch S. 14, dort insb. FN 1.

2) Vgl. D. Mayers (1972), S. 224

3) "... if there were a perfect market for produced human capital, human capital would be treated like any other portfolio asset." D. Mayers (1972), S. 245, FN 7.

4) "Human capital...cannot be sold outright in the market", E.F. Fama (1970), S. 169.

5) Und das Vertrauen bzw. Kontroll- oder Absicherungsmöglichkeiten des Kreditgebers. Als Beispiel vgl. die Konstruktion von Modell A bei J.B. Long Jr. (1972a), S. 153. Vgl. auch S. 13 ff.

Einschränkung der persönlichen Freiheit ist Voraussetzung jedes Handels. Objektivierbare Einkommen (Einkommensteile) und nicht künftige Arbeitsleistung sind Gegenstand eines solchen Vertrags. Der Kreditgeber kann heute (z.B. durch Weiterverkauf) über das an ihn abgetretene Einkommen[1] nach seiner jeweiligen Entstehung verfügen. Ob solche Kreditverträge zustande kommen, ist eine Frage der Kreditfähigkeit von human capital, nicht seiner Handelbarkeit. Die Kriterien der Kreditfähigkeit sind andere als die der Handelbarkeit, Kreditfähigkeit von Wirtschaftssubjekten und ihre Grenzen[2] sind von Bedeutung für die Verfollkommnung der Kreditmärkte[3], nicht der Kapitalmärkte.[4] Die Modellannahme, daß alle Wirtschaftssubjekte in beliebigem Umfang zum sicheren Marktzins entleihen können, ist ein Grenzfall, der z.B. zulässig ist, wenn die Kreditfähigkeit der Haushalte in dem zu untersuchenden Zusammenhang eine quantitativ nur geringe Rolle spielt.

Das Vorhandensein prohibitiver Transaktionsungewißheit derart, daß Ansprüche nur im Zeitpunkt ihrer Realisation gehandelt werden,[5] ist hinreichend zur Begründung der Neueröffnung der Märkte.[6] Ebenfalls hinreichend ist die Beschränktheit des 'asset-Systems'.[7] Die Wiedereröffnung der Märkte in jedem Zeitpunkt wird als Märktfolgensystem[8] bezeichnet. Ein Marktfolgensystem ist ein beschränktes vollständiges oder ein (temporär) unvollständiges[9] System infolge der Nichthandelbarkeit von Ansprüchen im gerade geschilderten Sinne. In der

---

1) Vgl. in diesem Zusammenhang auch die Unterscheidung zwischen Kredit- und Termingeschäften, z.B. bei J.R. Hicks (1962).

2) Bezüglich Quantität und Fristigkeit.

3) Hier mit dem Begriff 'Bondsmarkt' umschrieben.

4) Im Sinne von Aktienmärkten.

5) 'Zug-um-Zug-Geschäfte'.

6) Zu den grundsätzlichen Überlegungen zu einem 'failure of markets' vgl. auch K.J. Arrow (1974a), S. 7 ff.

7) Vgl. hierzu nochmals die Begründung des Handels mit assets, S. 26 ff.

8) In diesem Zusammenhang ist auch das Konzept der Hicks'schen Woche und der Begriff des temporären Gleichgewichts zu sehen, vgl. J.R. Hicks (1962), S. 122 f.

9) Vgl. S. 25, FN 2.

zweiten Version können natürlich zusätzlich auch assets auftreten. Das Marktfolgensystem ermöglicht neben einer fortlaufenden zeitlichen auch eine Risikoumstrukturierung der Ansprüche bei gegebener Planung. Dies ist die Folge zusätzlicher Informationen im Zeitverlauf.[1] Die neuen Informationen bedeuten nicht, daß Präferenzen oder Erwartungen geändert werden. Sie sind der Ausdruck einer nun für alle gegebenen sicheren Situation, die sich in den vorgegebenen Beständen des jeweiligen Gegenwartsgutes und in den Preisen auf den temporären Märkten widerspiegelt. Von der Wiedereröffnung der Märkte sind alle handelbaren Ansprüche betroffen. Die in einer Periode abgeschlossenen Kontrakte haben die Entscheidungen bezüglich der Umstrukturierung der temporär gegebenen und handelbaren Anfangsbestände an Gegenwartsgütern und an künftigen sicheren und ungewissen Ansprüchen zum Gegenstand. Der Einfachheit halber kann bezüglich letzterer angenommen werden, daß ihre Märkte in allen Perioden vorhanden sind.[2] Z.B. betreffen die Aktionen in $t = 0$ aufgrund des in diesem Zeitpunkt gewählten Plans die Nachfrage nach dem Gegenwartsgut zwecks Verbrauch (endgültig), evtl. endgültigen künftigen Verbrauch und im übrigen die Ausgangssituation für die nächste, bzw. spätere Perioden.[3]

Analog hierzu lassen sich die in $t = 1$ und später auszuführenden Entscheidungen charakterisieren. Sie hängen von dem dann jeweils herrschenden Zustand ab. In $t = 0$ kann also

---

1) R. Radner (1968) unternimmt es, diesen Zusammenhang formal zu fassen.

2) So gäbe es z.B. in jedem Zeitpunkt Aktienmärkte für die ungewissen Gewinnfolgen aller Unternehmungen sowie Märkte für sichere Titel mit unendlicher bzw. einperiodiger Laufzeit. Zur Anwendung solcher vereinfachten Marktfolgensysteme vgl. J.B. Long Jr. (1972a), insbesondere S. 153 f. Bezüglich der Abgrenzungsüberlegungen vgl. J.R. Hicks (1962), S. 148 ff.

3) So wird ein Haushalt im Marktfolgensystem mit einem gegebenen Anfangsbestand an Gütern zwecks Maximierung des Nutzens über einen Zeitraum von zwei Perioden nach Ablauf einer Periode nicht genau seinen Anlagebestand an kurzfristigen Titeln verbrauchen und nach zwei Perioden den heute gewählten Bestand an Titeln mit zweiperiodiger Laufzeit. Vielmehr wird er in seine heutige Planung geradezu einbeziehen, daß er nach Ablauf einer Periode - je nach dann herrschendem Kurs für den längerfristigen Titel - entweder zugunsten der ersten oder der zweiten Periode umschichtet. Vgl. J.E. Stiglitz (1970).

bezüglich späterer Perioden nur eine bedingte Entscheidung für die Zeitpunkte t, $1 \leq t \leq T$, getroffen werden (sogenannte Entscheidungsregeln). Im Extremfall wird nur zwischen Gegenwartskonsum und Endvermögen der laufenden Periode = Anfangsvermögen der nächsten Periode aufgeteilt. Je nachdem, welcher Zustand zu Beginn der nächsten Periode herrscht, werden dann die für diesen Fall geplanten Aktionen auf den Kassa-, Kredit- und Terminmärkten usw. für den gesamten Planungszeitraum vorgenommen.[1] Welche zustandsabhängigen Aktionen in den jeweiligen Zeitpunkten zu treffen sind, wird allerdings schon zu Beginn des Planungszeitraums festgelegt mit Hilfe der stochastischen Programmierung.[2]

---

1) Ein Beispiel hierzu findet sich im nachfolgenden Abschnitt, S. 38 f.

2) Grundsätzliches hierzu siehe R. Bellman (1957). Eine ausführliche übersichtsartige Darstellung des optimalen Verhaltens der Haushalte unter Ungewißheit im Mehrperiodenfall durch Anwendung der stochastischen Programmierung ist die Arbeit von J.B. Long (1972a). Spezieller hierzu vgl. auch P.A. Samuelson (1969) für den diskreten und R.C. Merton (1969) für den kontinuierlichen Fall. E.F. Fama (1970) untersucht für diesen Komplex die Fragestellung der Separation der mehrperiodigen simultanen Planung des Haushalts unter Ungewißheit in eine äquivalente Folge einperiodiger Planungen über Gegenwartsverbrauch und Anfangsbestand der nächsten Periode. Die Separation der Planung wird zulässig bei möglicher Separation der Nutzenfunktion. In diesem Fall ist das Prinzip der dynamischen Programmierung als Spezialfall der stochastischen Programmierung anwendbar (vgl. auch J.B. Long (1972a), S. 169).

Hier sei nur der Gedankengang dieser sogenannten 'Rückwärtsrechnung' für den diskreten Fall skizziert (vgl. insb. auch P.A. Samuelson (1969)):
Für den letzten Zeitpunkt T wird für jeden dann möglichen Zustand das beste Ergebnis zu allen im jeweiligen Zustand in $T - 1$ denkbaren Ausgangssituationen gekennzeichnet. Dann wird für $t = T - 2$ die Menge aller möglichen Ergebnisfolgen für $t = T - 1$ und $t = T$ zu jedem in $T - 2$ möglichen Zustand (= Ausgangssituation) betrachtet. Dabei werden natürlich die Auswahlergebnisse auf der ersten Stufe berücksichtigt. Hieraus wird nun wieder die optimale Folge je Zustand in $T - 2$ ausgewählt usw. zurück bis zum Zeitpunkt $t = 0$. Damit steht für jeden Zeitpunkt und Zustand die optimale Wahl zur Verfügung, insgesamt also bei gegebener Ausgangssituation in $t = 0$ die optimale Strategie für den gesamten Planungszeitraum.

Die Problematik der Optimalität des Marktfolgensystems behandeln R. Guesnerie und J.Y. Jaffray (1974).

1.2.2.3 Zulässigkeitsbereich und individueller Möglichkeitsbereich

Diejenigen Gütervektoren, die durch Handel realisierbar sind, bilden den Zulässigkeitsbereich Z eines Güterraums, über den zu entscheiden ist,

$$Z = Z(\mathcal{A}) = U(\mathcal{A}) \cap X .$$

Dabei ist $U(\mathcal{A})$ der von der Menge der a_j aufgespannte Vektorraum. Es ist also der Zulässigkeitsbereich abhängig vom gegegebenen Marktsystem. Im vollständigen System gilt insbesondere

$$Z(\mathcal{A}) = X .$$

Güterkombinationen (Sequenzen), die nicht Element von $Z(\mathcal{A})$ sind, mögen zwar in den Beständen der Wirtschaftssubjekte vorhanden und damit Gegenstand der Bewertung sein. Sie können jedoch nicht umstrukturiert werden, da keine (direkten oder indirekten) isolierenden Tauschmöglichkeiten bestehen. Werden z.B. nur Teile von gehandelten Kombinationen nachgefragt, so muß die ganze unteilbare Kombination eingetauscht werden.

Sei mit $\bar{x}_i = (\bar{\xi}_{ki}) = \bar{a}_i \cdot a' + \hat{\bar{x}}_i$

die Erstausstattung des Haushalts i bezeichnet, mit $\bar{a}_i = (\bar{a}_{1i},\ldots,\bar{a}_{K',i})$ als Vektor des individuellen Bestands an handelbaren Ansprüchen für ein gegebenes Marktsystem $\mathcal{A}$, d.h. $a' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{K'} \end{pmatrix}$ und $\hat{\bar{x}}_i$ als individuellem Bestand an nicht handelbaren Komponenten des Güterraums. Die Tauschmöglichkeiten des Haushalts i lassen sich dann mit Hilfe der Budgetgleichung angeben,

$$p_{\mathcal{A}} \cdot a_i' = p_{\mathcal{A}} \cdot \bar{a}_i' \ , \ a_i, \bar{a}_i \in U(\mathcal{A}), \ p_{\mathcal{A}} = (1, p_2, \ldots, p_{K'}) \ .$$

Danach ergibt sich für den individuellen Möglichkeitsbereich B_i infolge der Tauschmöglichkeiten für Haushalt i

$$B_i = \left\{ x_i \,\middle|\, x_i = (..,\xi_{ki},..) = (..,\sum_{j=1}^{K'} a_{ji}\xi_{kj},..);\ p_{\mathcal{A}} \cdot a_i' \leq p_{\mathcal{A}} \cdot \bar{a}_i' , \right.$$

$$\left. \mathcal{A} = \{a_1,..,a_j,..a_{K'}\} \subset U(\mathcal{A}) \text{ mit } a_j = (..,\xi_{kj},..). \right\} .$$

Insbesondere gilt für das vollständige System

$$B_i = \left\{ x_i \,\middle|\, \phi \cdot x_i' = \phi \cdot \bar{\bar{x}}_i' \;,\; x_i \in \mathbb{R}_+^K \right\}$$

mit ϕ als Preisvektor der Elementaransprüche (vgl. oben S.24). Daß letztlich die Güterkombinationen $x_i + \bar{\bar{x}}_i$ realisierbar sind, wird nicht explizit, sondern durch die Annahme zustandsabhängiger Nutzenfunktionen berücksichtigt.[1)]
Es lassen sich grundsätzlich vier Typen von Handelsbeschränkungen unterscheiden, für die im folgenden Zulässigkeits- und Möglichkeitsbereiche anhand eines Beispiels für den dreidimensionalen Güterraum erläutert werden.

1. Fall: Es gibt keine Handelsbeschränkung.

Im dreidimensionalen Güterraum werden z.B. das Gegenwartsgut, das künftige Gut in Zustand 1 und das sichere künftige Gut gehandelt.
Handelsobjekt sind also die Vektoren

$e_o = (1,0,0)$, $e_{11} = (0,1,0)$ und $c_1 = (0,1,1)$.

Somit ist jeder Vektor $x \in \mathbb{R}_+^3$ zulässig, also

$$Z_1 = \mathbb{R}_+^3 \;,$$

da für alle x

$$x = (\xi_o, \xi_{11}, \xi_{12}) = \xi_o e_o + (\xi_{11} - \xi_{12}) e_{11} + \xi_{12} c$$

gilt.
Bei gegebenem Anfangsbestand $\bar{\bar{x}}$ und bei gegebenem p ist dann jeder Punkt aus OABC (vgl. Figur 1, S.40) für den Haushalt realisierbar.

Für den individuellen Möglichkeitsbereich gilt

$$B_1 = \left\{ x \,\middle|\, \xi_o + \phi_1 \xi_{11} + \phi_2 \xi_{12} \leqq \xi_o + \phi_1 \bar{\bar{\xi}}_{11} + \phi_2 \bar{\bar{\xi}}_{12} \right\} .^{2)}$$

(Allgemeine Bemerkung: Unter der Annahme der Unersättlichkeit gilt das Gleichheitszeichen.)

2. Fall: Es gibt keinen Handel.

Zulässigkeitsbereich und Möglichkeitsbereich sind in diesem Fall gleich der Nullmenge.

---

1) Vgl. hierzu die Bemerkungen unter den Überschriften 'Unvollständiges System', insb. S.30 , sowie 'Eindeutigkeitsaxiom', S. 46 ff.
2) Mit $\phi_2 = p_{c_1} - \phi_1$ (vgl. S.25).

$$Z_2 = B_2 = 0.$$

Der Haushalt kann nur die Elemente der Menge $\{x_i | x_i \leq \bar{x}_i$ realisieren.
In Figur 1, S.40 , entspricht letzteres dem Quader mit den Eckpunkten O,D.

3. Fall: Eine bestimmte Anzahl von Güterkomponenten L<K-1 werden nicht gehandelt, also K'<K.[1)]
Für den dreidimensionalen Raum werden z.B. nur Gut Nr. 0 und Gut Nr. 11 gehandelt, während individuelle, aber nicht handelbare Bestände an Gut Nr. 12 bestehen. Zulässig ist dann der von e_o und e_{11} aufgespannte zweidimensionale Güterraum, soweit seine Elemente nicht negativ sind,

$$Z_3 = U(\{e_o, e_{11}\}) \cap \mathbb{R}^3_+ \ .$$

$$B_3 = \{x | \xi_o + \phi_1 \xi_{11} \leq \bar{\xi}_o + \phi_1 \bar{\xi}_{11}\} \ .$$

Der Möglichkeitsbereich läßt sich als 'Keil' OEFGHI in Figur 1, S.40, verdeutlichen. Im Fall der Unersättlichkeit liegt der optimale Verbrauchsplan auf der Schnittgeraden IF.

4. Fall: Alle Komponenten des K-dimensionalen Güterraums werden gehandelt, jedoch nur in Kombinationen, deren Anzahl beschränkt, d.h. kleiner als K ist.
Für den 3-Güter-Fall bedeutet dies, daß z.B. nur e_o und c_1 gehandelt werden.
Damit ist der Zulässigkeitsbereich die Menge aller nicht negativen Linearkombinationen aus diesen beiden Titeln,

$$Z_4 = \{x | x \in \mathbb{R}^3_+ \wedge \xi_{11} - \xi_{12} = 0\} \ .^{2)}$$

Für den Möglichkeitsbereich gilt

$$B_4 = \{x | \phi \cdot x' \leq \phi \cdot \bar{x}'\} \ .^{3)}$$

Dies ist in Figur 2, S.40 , die Fläche OJC.
Es gilt:

---

1) Die individuellen nicht handelbaren Bestände beeinflussen die Nutzenfunktion. Vgl. Absch. 1.2.2.2, S.30 , sowie 1.2.2.4, S.47.

2) $\xi_{11} - \xi_{12} = 0$ ist ein Spezialfall der in Abschn. 1.2.3.3, insb. S. 69 ff. hergeleiteten Restriktionsmatrix M.

3) Dabei ist zu beachten, daß einige der Komponenten von ϕ gleich der Null sein können. Vgl. S.72 .

Fall 1 ist nur bei einmaliger Öffnung der Märkte sinnvoll. Das Marktfolgensystem ist entweder als temporär beschränktes System oder als temporär unvollständiges System zu interpretieren. Bezüglich der temporären Zulässigkeitsbereiche und Budgetgleichungen ergeben sich keine grundsätzlichen Abweichungen gegenüber dem Fall der einmaligen Öffnung der Märkte. Zur Erläuterung des Unterschieds erscheint es hier ausreichend, die Modifikation der Budgetgleichungen herauszustellen.[1] Statt einer Budgetgleichung für den gesamten Zeitraum existiert eine Kette von zeitpunktbezogenen Budgetgleichungen. Die individuellen Möglichkeiten für eine Periode t ergeben sich aus den bisher nicht gehandelten (in $t' < t$ ungewissen oder sicheren) Anfangsbeständen, aus den sicheren und ungewissen Formen des möglichen Vermögenstransfers aus der Vorperiode, diese und künftige Perioden betreffend, soweit handelbare Ansprüche existieren, in Verbindung mit den (in $t' < t$ ungewissen) Kassapreisen zu diesem Zeitpunkt.[2]

Man betrachte z.B. den Fall $T = 2$, $S_1 = S_2 = 2$ und damit $S = 4$.[3] Die Märkte seien geöffnet in $t = 0$ und $t = 1$. Gehandelt werden in $t = 0$ die Ansprüche e_o und c_1. In $t = 1$ werden das Gegenwartsgut e_{11}, bzw. e_{12} (abhängig vom realisierten Zustand), sowie e_{21} und e_{22}, bzw. e_{23} und e_{24} gehandelt.
Die Budgetgleichung in $t = 0$ lautet

$$\xi_o + p_{c_1} \cdot \gamma_1 = \bar{\xi}_o + p_{c_1} \bar{\gamma}_1 \quad ,$$

γ_1 bezeichnet die Mengeneinheiten von c_1.

Die Budgetgleichung in $t = 1$ ist abhängig vom in $t = 1$

---

1) Da im Folgenden auf das Marktfolgensystem nicht weiter eingegangen wird (vgl. 2.2.2), wird zur Verdeutlichung des Zusammenhangs auf J.B. Long (1972 a), insb. S. 153 ff. verwiesen.

2) Alle diese Größen hängen wiederum von der gesamten 'Vorgeschichte' bis zum Zeitpunkt t ab.

3) Vgl. hierzu auch J. Hirshleifer (1970), S. 268, sowie A. Sandmo (1974). Letzterer verdeutlicht auch die Verwendung ungewisser Budgetgleichungen bei der Nutzenmaximierung

herrschenden Zustand.
Sie lautet mit Wahrscheinlichkeit π_1

$$\xi_{11} + \phi^1_{21}\xi_{21} + \phi^1_{22}\xi_{22} = \bar{\xi}_{11} + \phi^1_{21}\bar{\xi}_{21} + \phi^1_{22}\xi_{22} + \gamma_1$$

mit Wahrscheinlichkeit $1-\pi_1$

$$\xi_{12} + \phi^2_{21}\xi_{23} + \phi^2_{22}\xi_{24} = \bar{\xi}_{12} + \phi^2_{21}\bar{\xi}_{23} + \phi^2_{22}\bar{\xi}_{24} + \gamma_1 \quad .$$

Dabei ist z.B. ϕ^1_{22} der Preis (gemessen in Einheiten des 'Gegenwartsgutes' in $t = 1$) für einen Güteranspruch im Zustand $s = 2$ im Zeitpunkt $t = 2$ auf dem in $t = 1$ wieder eröffneten Markt bei Vorliegen von Zustand $s = 1$ in $t = 1$.
Für $t = 1$ wird ein $\bar{\xi}_{1s}$ realisiert, das zwei Ausprägungen annehmen kann.

Für $t = 2$ wird dann ein ξ_{2s} realisiert, das 4 Ausprägungen annehmen kann: ξ_{21} hat die Eintrittswahrscheinlichkeit $\pi_1\pi_2$, ξ_{22} ist $\pi_1(1-\pi_2)$ zugeordnet usw.

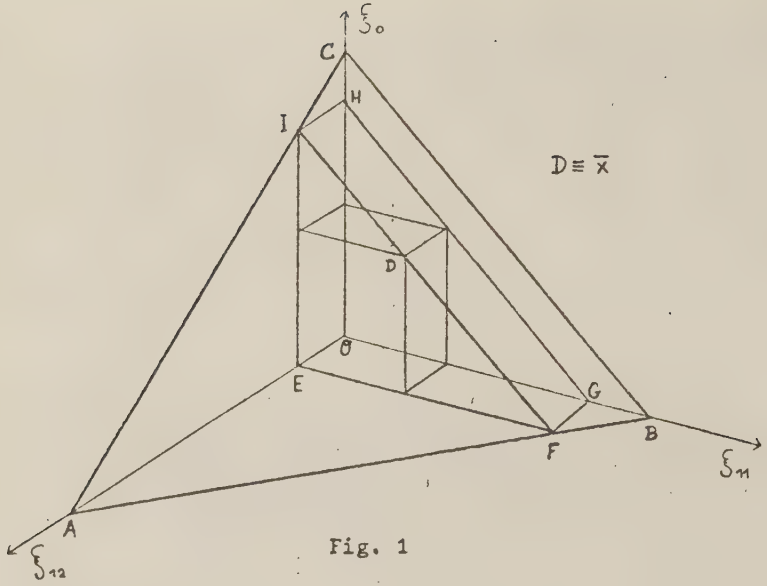

Fig. 1

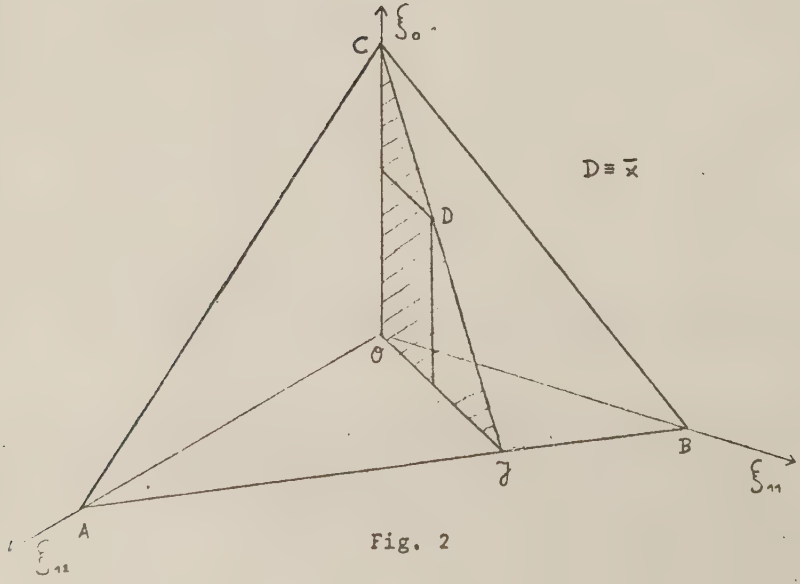

Fig. 2

1.2.2.4 Die Zielfunktion der Haushalte

Als Bewertungsmaßstab für risikobehaftete Ergebnisse dient dem rationalen Haushalt der Erwartungswert des Nutzens aus einer Aktion.[1] Unter bestimmten Grundannahmen (Axiomen) bezüglich der Rationalität des Verhaltens läßt sich die subjektive Rangordnung über Aktionen mit ungewissem Ausgang zurückführen auf eine Rangordnung über den sicheren Ergebnissen.[2] Dies bedeutet, daß die spezielle Beurteilung des Risikos allein in die Gewichtung der sog. Elementarnutzen u(x) der alternativ möglichen Ergebnisse aus einer Aktion eingeht (Bernoulli-Prinzip). Beim Elementarnutzen handelt es sich um eine kardinale Rangordnung der entsprechenden sicheren Ergebnisse. Als Gewichte dienen die subjektiv vermuteten Eintrittswahrscheinlichkeiten.

Die Bewertung von 'Risiko' unterscheidet sich grundlegend von derjenigen anderer Gütermerkmale. Daß sich allgemeingültige Entscheidungsregeln für die Beurteilung von Risiko aufstellen lassen, ergibt eine Einschränkung der Ordnung über der durch die alternativen Zustände 'aufgeblähten' Menge, und zwar eine Reduktion genau wieder auf die Ordnung der in der zu beurteilenden Menge X enthaltenen Menge Y der zustandsabhängigen Ereignisse x_s ,

$$Y = \left\{ x_s \middle| x_s = (\xi_o, \xi_{1s}, \ldots, \xi_{ts}, \ldots, \xi_{Ts}),\ \xi_{ts} \geq 0 \right\} = R_+^{T+1} \ .$$

Die generelle, subjektive Risikoeinstellung (Indifferenz, Vorliebe oder Aversion[3]) wird in der Theorie der Entscheidung

---

1) Die Überlegungen dieses Abschnitts basieren hauptsächlich auf H. Schneeweiß (1967) und J. Hirshleifer (1966), sowie (1970), dort insb. S. 216 f. und 236 ff. . Vgl. aber auch K.J. Arrow (1970), S. 44-89 und J.H. Drèze (1974),sowie die in diesen Arbeiten angegebene Ursprungsliteratur.

2) Die anfängliche Kontroverse über die Gültigkeit dieses Zusammenhangs ist im Grunde diejenige der Gültigkeit der Axiome. Auf eine Wiedergabe sei wegen der inzwischen allgemein erfolgten Anerkennung verzichtet. So wird in diesem Zusammenhang nur auf die Darstellungen von J. Ebel (1969), S. 28 ff. und neuerdings von J.H. Drèze (1974), S. 13 ff. verwiesen.

3) Zum Inhalt dieser Begriffe vgl. J. Hirshleifer (1970), S. 225 ff., speziell zu den verschiedenen Formen der Risikoaversion J.W. Pratt (1964). Vgl. auch das Beispiel in FN 3 zu S. 57, S.57 f.

bei Ungewißheit bei der Konstruktion der subjektiven Elementarnutzen berücksichtigt. So ist die Bewertung der Ungewißheit bereits - unabhängig von den konkreten Vorstellungen über bestimmte zu beurteilende Wahrscheinlichkeitsverteilungen - fiktiv in der zugrundeliegenden elementaren Nutzenfunktion über Y enthalten. Die speziellen, den Zuständen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten gehen nur in die Erwartungswertberechnung für den Nutzen ein, und zwar bei gleichen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen für alle Haushalte auf die gleiche Weise. Dies soll nun im folgenden demonstriert werden.

Die Menge der zu bewertenden Ergebnisse ist der Güterraum X mit der Dimension TS+1 (=S+1 für den Fall T=1, vgl. hierzu 1.2.2.1). Die Komponente 'Gegenwartsgut' kann in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden, damit ist vereinfachend dim X = TS. Wegen der speziellen Bedeutung des Gütermerkmals 'Zustand' läßt sich jedes Element $x \in X$ auch charakterisieren als Wahrscheinlichkeitsverteilung ω[1] einer Zufallsvariablen, d.h. als Vektor $x_s \in Y$, der einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung π mit S Ausprägungen unterliegt:

$$\omega = (x', \pi) \in \Omega$$

mit $$x' = (x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_S) \ , \ x_s \in Y$$

und $$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_S) \ ,$$

wobei $$\pi_s \geq 0 \text{ für alle } s \text{ und } \sum_s \pi_s = 1 \ .$$

Ω ist die Menge aller möglichen ω bei gegebenem Y und gegebenem π. Jedem $x \in X$ entspricht genau ein $\omega \in \Omega$.

Es wird im folgenden gezeigt, daß die subjektive Rangordnung über X, bzw. der Menge der ω , zurückzuführen ist auf eine kardinale Rangordnung $u(x_s)$ über den Elementen von Y. Und zwar gilt: Der Haushalt trifft rationale Entscheidungen, wenn er mit Risiko behaftete Aktionen anhand des Erwartungswertes der Elementarnutzen aus den alternativ möglichen Ergebnissen beurteilt (sog. Bernoullinutzen),

$$U(x) = U(\omega) = E_{\omega} u(x_s) \ .$$

---

1) ω entspricht dem Begriff des 'prospects' bei Hirshleifer. Vgl. J. Hirshleifer (1970), S. 216.

Diese Entscheidungsregel sei für eine diskrete Verteilung[1] von Ergebnissen mit S Ausprägungen über einer Zufallsvariablen mit $T+1 \geq 2$ Komponenten abgeleitet.
Die Berücksichtigung der Eintrittswahrscheinlichkeiten für die x_s bei der Bewertung ist dann allgemein gültig, d.h. objektiv angebbar. Dies ist möglich, wenn für jeden Haushalt die folgenden 'Axiome der Rationalität' gelten.

Axiome rationalen Verhaltens bei Ungewißheit[2]

Die Axiome werden für den T+1-dimensionalen Fall wiedergegeben. Die jeweilige Bedeutung im Fall T=1 ist leicht nachvollvollziehbar.

Axiom 1: Es existiere eine vollständige transitive Ordnung $\succsim$[3] über den Elementen von Y[4], d.h.
es gelte

- $x \succsim y \quad \vee \quad y \succsim x$ für alle $x,y \in Y$ und
- $x \succsim y \quad \wedge \quad y \succsim z \quad \rightarrow \quad x \succsim z \quad , \quad x,y,z \in Y \quad .$

Damit gilt insbesondere

$$x \succ y \quad \wedge \quad y \succsim z \rightarrow x \succ z \quad .$$

Es wird weiterhin gefordert, daß
$x \succ y \quad , \quad x,y \in Y \quad ,$
wenn für mindestens ein Paar $(\xi_{\bar{t}}, \eta_{\bar{t}})$ gilt

$$\xi_{\bar{t}} > \eta_{\bar{t}}$$

und im übrigen

---

1) Nur solche interessieren im Fall einer endlichen Anzahl von Zuständen und damit Ansprüchen, wie sie das A-D-Modell voraussetzt. Schneeweiß dagegen untersucht alle denkbaren Verteilungen über einer Größe, vgl. H. Schneeweiß (1967). Die hier gewählte Darstellung lehnt an Hirshleifer an, vgl. J. Hirshleifer (1970), S. 216 ff., sowie S. 235 ff.

2) Vgl. hierzu insb. J. Hirshleifer (1970), S. 236 ff., im übrigen siehe S. 41, FN 1.

3) Lies $x \succsim y$: "x wird y vorgezogen oder ist in diesem nutzengleich", kurz: "x vor y",
$x \sim y$: "x nutzengleich y",
$x \succ y$: "x strikt vor y" .

Es ist $x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge y \succsim x$
und $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge x \not\sim y$.

4) Diese Rangordnung entspricht der bekannten ordinalen Nutzenfunktion im Sicherheitsfall.

$$\xi_t \geq \eta_t$$

ist. Dies bedeutet, daß die Vergrößerung mindestens einer Koordinate einen Nutzenzuwachs hervorruft (Unersättlichkeitsannahme).

Axiom 2 (Stetigkeitsaxiom):

Seien $x,y \in Y$, $x \neq y$ mit der speziellen Annahme, daß sich x und y nur in einem Element unterscheiden. Sei z.B.

$$x \succ y \quad \text{wegen} \quad \xi_1 > \eta_1 \ .$$

Es existiere ein sog. Sicherheitsäquivalent $z \in Y$,[1] $x \succ z \succ y$ derart, daß bei gegebener Wahrscheinlichkeit p z äquivalent ist zur ungewissen Kombination, in der x mit der Wahrscheinlichkeit p und y mit der Gegenwahrscheinlichkeit eintritt. Dies sei wie folgt symbolisiert

$$z \sim x \ p \ y$$

mit $\xi_i = \zeta_i = \eta_i$ für alle $i = 1$

und $\xi_1 > \zeta_1 > \eta_1$.

Oder auch:
Es existiere stets ein p_z, $0 < p_z < 1$ derart, daß für ein gegebenes $z \in Y$ gilt

$$x \ p_z \ y \sim z$$

(Eigenschaften von x,y und z wie oben).

p_z werde definiert als Elementarnutzen

$$p_z := u(z)_{x,y}$$

bei gegebenem x und y.

Im folgenden werden x und y (als a und b) festgehalten. Es wird deshalb statt $u(z)_{x,y}$ einfach u(z) geschrieben.

$$a \ u(z) b \sim z \quad , \quad a,b \in Y \ .$$

Dies bedeutet - wie man leicht sieht -, daß $u(a) = 1$

1) Es handelt sich hierbei um eine 'technische' Kontinuität ('technical assumption'), vgl. J.H. Drèze (1974), S. 11 und K.J. Arrow (1970), S. 48.

und $u(b) = 0$ gesetzt werden. Die Wahl von p_z - allgemein von p_{x_s} - ist subjektiv, in ihr kommt die Risikoeinstellung des Haushalts - Vorliebe, Indifferenz oder Aversion - zum Ausdruck, je nachdem, ob der Erwartungswert des fiktiven Spiels $a\ p_{x_s}\ b$ größer oder kleiner ist als sein Sicherheitsäquivalent x_s oder ihm entspricht.[1] Im Gegensatz zur Nutzenfunktion unter Sicherheit ist der Elementarnutzen $u(x_s)$ kardinal,[2] da Wahrscheinlichkeiten kardinale Zahlen sind. Wegen $u(x_s)$ kardinal ist der Begriff des Grenznutzens hier im Gegensatz zum Fall der ordinalen Nutzen(index)funktion sinnvoll. Im Fall $N = T = 1$ z.B. gibt der Grenznutzen an, um wieviel sich die Wahrscheinlichkeit für die Spielkomponente a(bei gegebenen a und b) ändern muß, damit das Spiel bei einer marginalen Änderung des sicheren Ergebnisses diesem äquivalent bleibt.

Wegen der Vollständigkeit und Transitivität der Ordnung über Y , wie sie in Axiom 1 postuliert ist, sind damit wegen des Stetigkeitsaxioms zugleich alle einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $x'p\ y'$, $x', y' \in Y$, $0 \leq p \leq 1$, vollständig und transitiv geordnet. Aus Axiom 2 folgt die Stetigkeit der elementaren Nutzenfunktion $u(x_s)$ und damit die des Bernoulli-Nutzens.

Axiom 3 (Substitutions- oder Unabhängigkeitsaxiom):[3]
Seien ω, ω', $\omega'' \in \Omega$[4] Verteilungen über Elementen aus X' mit $\omega \succsim \omega'$, sowie ω'' beliebig. Dann gilt für die zusammengesetzen Verteilungen $\omega\ p\ \omega''$ und $\omega'\ p\ \omega''$ ($0 < p < 1$, beliebig) ebenfalls Präferenz, bzw. Indifferenz.
Ist insbesondere $u(\omega) = u(\omega')$,
dann gilt auch $u(\omega\ p\ \omega'') = u(\omega'\ p\ \omega'')$,

---

1) Vgl. z.B. J. Hirshleifer (1970), S. 225, sowie H. Schneeweiß (1967), S. 45.
2) "Kardinal ist ein Nutzen, wenn er bis auf die messende Nutzeneinheit und den Nutzennullpunkt eindeutig festgelegt ist," H. Scheeweiß (1967), S. 29.
3) Auch 'Sure-Thing Principle', vgl. z.B. L.J. Savage (1954).
4) Vgl. S. 42.

d.h.:
In allen riskablen Vektorkombinationen kann ω' ein äquivalentes ω dieser Art substituieren und umgekehrt.

$$\omega \; p \; \omega' = \omega'' \Leftrightarrow \omega \; p \; \omega' \sim \omega'' \Longleftrightarrow U(\omega \; p \; \omega') = U(\omega'').$$

Eine direkt erzielbare Verteilung ω'' ist äquivalent einer zusammengesetzten Verteilung $\omega \; p \; \omega'$ mit dem gleichen Endergebnis, d.h. die Bewertung einer Verteilung über einem gegebenen T -elementigen Vektor ist unabhängig von ihrem Zustandekommen.[1] Axiom 3 ist die Begründung dafür, daß die Bewertung mit Sequenzen einfach mithilfe einer Ausweitung des Güterbegriffs infolge einer größeren Anzahl zu unterscheidender Zustände möglich ist. Das Substitutionsaxiom - als Annahme der Nichtkomplementarität der in den zusammengesetzten Verteilungen enthaltenen möglichen Ausgänge - ist plausibel, da die Ergebnisse alternativ und nicht als Kombination auftreten.[2]

Das sogenannte Dominanzprinzip ist ein Sonderfall des Substitutionsaxioms:

Sei $\omega \succ \omega'$. Dann folgt daraus

$$\omega \; p \; \omega' \succ \omega' p \; \omega'$$

$$\omega \; p \; \omega \succ \omega \; p \; \omega'$$

d.h. $\omega \succ \omega \; p \; \omega' \succ \omega'$ für alle p, $0 < p < 1$.[3]

Axiom 4 (Eindeutigkeitsaxiom):

$$u_s(x_s) = u(x_s) \quad \text{für alle} \quad s = 1,\ldots,S, \quad x_s \in Y \quad .$$

---

1) Dies ist die Annahme, daß kein Nutzen aus der Spielsituation als solcher gezogen wird. Speziell hierzu sowie auch allgemein zur Erläuterung und Verteidigung von Axiom 3, vgl. P.A. Samuelson (1966 b).

2) Vgl. P.A. Samuelson (1966 b), S. 139: "Within the stochastic realm, independence has a legitimacy that it does not have in the nonstochastic realm. Why? Because either heads or tails must come up:..".

3) Ebenso läßt sich zeigen

$$\omega \; p_1 \; \omega' \succ \omega \; p_2 \; \omega' \quad \text{für} \quad p_1 > p_2 \quad .$$

Die Bewertung eines Ergebnisses sei unabhängig vom Zustand der Welt, in dem es eintritt. Anders formuliert: Der Elementarnutzen eines Ergebnisses ist nur abhängig von den in x_s enthaltenen Gütermengen. Diese Annahme ist dann gerechtfertigt, wenn das einzige, was die Zustände unterscheidet, ihre Eintrittswahrscheinlichkeiten sind. Sie bedeutet, daß die Situationskomponenten mit Ausnahme ihres Eintritts entweder beeinflußbar sind in dem Sinn, daß sie als Komponenten des Ergebnisvektors auftauchen oder daß sie in allen alternativen Zuständen die gleiche Ausprägung annehmen.[1] Letzteres ist von Bedeutung für die Beurteilung der nicht handelbaren Güterbestände (vgl. S.29f).[2]

Erläuterung: Sei z.B. $s = 1$ ein Zustand, in dem 100 DM Einnahmen anfallen, außerdem sei in ihm der Entscheidende krank, $s = 2$ sei ein Zustand, in dem ebenfalls 100 DM anfallen, jedoch unter normalen Umständen. Vermutlich wird $u_{s=1}(100) \neq u_{s=2}(100)$ sein. Ebenso wird eine Portion Eis bei Sonnenschein vermutlich anders bewertet als bei Regenwetter. Wenn sich dagegen $s = 1$ und $s = 2$ nur dadurch unterscheiden, daß einmal 100 DM mit 20 % Wahrscheinlichkeit, zum anderen mit 25 % Wahrscheinlichkeit auftreten, dann erscheint es sinnvoll

$$u_{s=1}(100) = u_{s=2}(100)$$

anzunehmen. Damit gilt

$$U(100 \; ; \; s = 1 \text{ oder } s = 2) = 0{,}2u_{s=1}(100) + 0{,}25 \; u_{s=2}(100)$$
$$= 0{,}45 \; u(100).^{3}$$

---

1) So argumentiert auch E.F. Fama (1970), S. 168 f.: "...the most direct way to exclude state dependent utilities is to asume that the consumer behaves as if the consumption opportunities...and the investment opportunities...that will be available in any future period can be taken as known and fixed at the beginning of any previous period, and that the consumer's tastes for given bundles of consumption goods and services are independent of the state of the world."

2) Risiko bezüglich des Zustandes ist definitionsgemäß unbeeinflußbar.

3) Vgl. hierzu insbesondere J. Hirshleifer (1970), S. 221.

Die Eindeutigkeitsannahme ist umstritten, sie ist aber entscheidender Bestandteil des A-D-Modells. Hirshleifer unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen 'hazards' und 'lotteries'.[1] Erstere sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Gütervektoren, die an Verteilungen über Umweltsbedingungen anknüpfen. Letztere sind abstrakte Verteilungen über Gütervektoren. Die Unterscheidung bei Hirshleifer erschöpft sich jedoch in der Definition.[2] Er behandelt dann alle 'hazards' durch die Einführung des Eindeutigkeitsaxioms wie 'lotteries'.

Es kann zusammengefaßt werden:

- Die Axiome 1 bis 4 sind Grundannahmen über das subjektive Entscheidungsverhalten, woraus sich die Forderung ihrer Allgemeingültigkeit ergibt. Sie werden deshalb mit dem Begriff 'rationales Verhalten' umschrieben. Sie sind hinreichend zur Begründung des Bernoulli-Prinzips, wie anschließend gezeigt wird.

- Mithilfe von Axiom 2 läßt sich der Elementar- oder Kardinalnutzen konstruieren. Der Elementarnutzen ist eine Funktion $u(x_s)$, die den Komponenten x_s des ungewissen Ergebnisses x Wahrscheinlichkeiten p_{x_s} zuordnet, die das zu x_s nutzenäquivalente Spiel $a\ p_{x_s}\ b$ charakterisieren.

Bernoulli-Nutzen

Nachdem auf der ersten Stufe der Elementarnutzenmessung die Komponenten der Ergebnisverteilung geordnet worden sind, läßt sich diese dann bewerten als Erwartungswert der Elementarnutzen der alternativen Ergebnisse bei gegebenem π. Es handelt sich beim Bernoulli-Nutzen gewissermaßen um eine 'Kurzfassung' der Entscheidungsprinzipien, deren Beobachtung durch Dritte auf Beachtung der Axiome 1 bis 4 bei der Entscheidung unter Risiko schließen läßt: Wer die Axiome akzeptiert, muß die Rangordnung $U(x)$ über den ungewissen Ergebnissen $(x;\pi)$ gemäß dem Erwartungswert des Nutzens $Eu(x_s)$

1) J. Hirshleifer (1970), S. 217.

2) Sie scheint nur zu dem Zweck gemacht, das Eindeutigkeitsaxiom zu erläutern.

bilden. Insofern stellt das Bernoulli-Prinzip eine Objektivierung subjektiver Rangordnungen dar.

Daß die Beurteilung ungewisser Ergebnisse anhand des Erwartungswertes des Nutzens eine notwendige Folgerung aus den Axiomen 1 bis 4 ist, soll nun gezeigt werden.[1)]

(1) Aus Axiom 1 folgt (wenn der triviale Fall reiner Indifferenzen ausgeschlossen wird), daß in der Menge der sicheren Ergebnisse Y ein schlechtestes Element b und mindestens ein Element a, $a \succ b$, existieren. Wegen der Annahme der Unersättlichkeit ist b der Nullvektor. Sei z.B. $a = (\bar{\xi}_1, 0, \ldots, 0)$. Seien $u(a) = 1$ und $u(b) = 0$ gesetzt.

(2) Gemäß Axiom 2 existiert eine kardinale Nutzenfunktion

$$u(x_s) \stackrel{def}{=} p_{x_s}$$

für alle zustandsabhängigen Ereignisse x_s, errechnet aus $a\ p_{x_s}\ b \sim x_s$ im Fall $a \succ x_s \succ b$, für $x_s \succ a$ aus $x_s\ p_{x_s}\ b \sim a$.[2)]

(3) Aufbauend auf dem gemäß (2) hergeleiteten Elementarnutzen kann nun der kardinale Nutzen für ungewisse Ergebnisse objektiv konstruiert werden.

Für die diskrete Verteilung $\omega = (x;\pi) = (x_1, \ldots, x_S); (\pi_1, \ldots, \pi_S))$ gilt folgende Überlegung:

$$\omega \sim \left[(a\ u(x_1) b, \ldots, a\ u(x_S)\ b); (\pi_1, \ldots, \pi_S)\right] \sim a\ p_x\ b$$

mit $p_x = \sum_s \pi_s u(x_s)$.

---

1) Für diskrete Verteilungen über T-komponentigen Gütervektoren.
Zur Beweisführung vgl. H. Schneeweiß (1967), S. 76, sowie P.A. Samuelson (1966 a), S. 134 f.

2) Für den Fall $T = 1$ ist dies eine unmittelbare Folge aus Axiom 2. Ebenso läßt sich mithilfe wiederholter Anwendung von Axiom 2 für jedes beliebige $x_s \in P_i$ zeigen, daß ein ihm nutzenäquivalentes $c = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}$ existiert. Für c wiederum existiert dann gemäß (1) ein p_c (Axiom 2). Dieses ist zugleich $u(x_s)$ (Axiom 1).

Begründung (Zweimalige Anwendung des Substitutionsaxioms, sowie Anwendung des Additions- und Multiplikationstheorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung):

Gemäß Substitutionsaxiom kann ω durch die nutzenäquivalente, zusammengesetzte Verteilung

$$\omega' = \left[(a\ p_1\ b, \ldots, a\ p_S\ b)\ ;\ (\pi_1, \ldots, \pi_S) \right] \quad 1)$$

ersetzt werden.

Dann ergibt sich

$$\omega \sim a\ \textstyle\sum_S p_S \pi_S\ b \equiv a\ \sum_S \pi_S u(x_S)\ b \quad .$$

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $p_X = \sum_S p_S \pi_S$, die gleichzeitig auch als der Erwartungswert der Elementarnutzen der sicheren Ergebnisse zu interpretieren ist, ist Ordnung über X in dem Sinn, daß gilt:

$x \in X$ wird einem $y \in X$ genau dann vorgezogen (ist diesem gleichwertig), wenn die jeweils äquivalente, zusammengesetzte Verteilung, basierend auf den beiden Vektoren a und b, die größere (gleiche) Wahrscheinlichkeit für x hat.

$$x \sim a\ p_x\ b$$

$$y \sim a\ p_y\ b$$

$$a\ p_x\ b \gtrless a\ p_y\ b \Longleftrightarrow p_x \geq p_y \quad 2)$$

in anderen Worten $x \gtrless y \Longleftrightarrow Eu(x) \geq Eu(y)$.

Der Erwartungswert des Elementarnutzens kann also als Ordnungsmaß verwendet werden, das den 'Axiomen der Rationalität' im obigen Sinn genügt.

In der vorliegenden Arbeit wird stets rationales Verhalten der Haushalte - wie es hier beschrieben wurde - angenommen. Ihr bei Ungewißheit anzustrebendes Ziel lautet also:

Maximiere $Eu(x) = \sum_S \pi_S u(x_S)$!

---

1) p_S steht für p_{x_S} .

2) Siehe auch J.H. Drèze (1974), S. 12.

1.2.2.5 Marktsysteme und intertemporäre Planung

Die folgenden Überlegungen dienen der Begründung der Beschränkung der Untersuchung der vorgenommenen Fragestellung auf den Einperiodenfall. Wann kann in einer Welt ungewisser Ansprüche der Einperiodenfall den Mehrperiodenfall ersetzen, ohne daß Wesentliches vernachlässigt wird?

Ein vollständiges Marktsystem (S. 23 f.) ermöglicht die Planung und gleichzeitige Fixierung derselben in den zugehörigen Vertragsabschlüssen für den gesamten Planungszeitraum - auch im Mehrperiodenfall. In den künftigen Zeitpunkten sind keine Entscheidungen mehr zu revidieren, dann sind nur noch die heutigen Kontrakte bezüglich der Planungsgrößen zu realisieren. (Sie sind in diesem System auch realisierbar!) Alle Märkte sind nur im Zeitpunkt t = 0 geöffnet. Also unterscheiden sich im vollständigen System ein- und mehrperiodige Planung unter Risiko in nichts Wesentlichem; es liegt nur - wie oben schon erwähnt - eine Erweiterung der Dimension des Güterraums vor.

Ein beschränktes System (S. 25 ff.) bedeutet auch im Mehrperiodenfall, daß alle möglichen Zeitpfade gehandelt werden, jedoch nur in Kombinationen (z.B. Produktionsrisiko in Form von Aktien), von denen jedoch weniger linear unabhängige existieren als Zeitfolgen. Auch in diesem Fall fällt die intertemporäre Planung, abgesehen von der Ausweitung der Dimension, völlig analog zum einperiodigen Fall aus.

Dies gilt auch für den (irrelevanten) Fall des unvollständigen Marktsystems (S. 29 f.), in dem bestimmte Komponenten des NTS-dimensionalen Güterraums nicht gehandelt werden und insofern Zustandsabhängigkeit der Nutzenfunktion angenommen werden muß.

In allen drei bisher angesprochenen Fällen wird in t = 0 geplant und kontrahiert, und nur in diesem Zeitpunkt sind auch die Märkte geöffnet. Die Unterscheidung 'Ein- oder Mehrperiodenfall' ist hier nur eine Frage der Dimensionen bzw. der Interpretation der Indices.

Dies ist jedoch anders unter der Annahme eines Marktfolgensystems im Zeitverlauf.

Die Wiedereröffnung der Märkte (S. 30 ff.) im Zeitverlauf bedeutet eine Abweichung gegenüber dem Einperiodenfall,

die in der Formulierung des Zulässigkeitsbereichs (vgl. S. 35 ff.) bzw. bezüglich der Entscheidungsprozedur (S.33 ff.) zum Ausdruck kommt. Bei der Ermittlung der Gleichgewichtsstrategie ist daher die mehrperiodige Analyse im Prinzip unumgänglich[1], ebenso bei der Prüfung des Einflusses der Veränderung der Parameter, die die Budgetbeschränkungen mehrerer Perioden zugleich betreffen.

Um die grundsätzliche Auswirkung des Einflusses von Parameteränderungen zu analysieren, die jeweils nur die Budgetgleichung einer bestimmten Periode, z.B. der laufenden, betreffen - wie dies in der vorliegenden Untersuchung beabsichtigt ist - ist die Reduktion auf den Einperiodenfall zulässig, ohne daß die qualitativen Implikationen für den analogen Mehrperiodenfall anders wären.[2] Ziel der vorliegenden Untersuchung ist die Lösung der Frage, ob grundsätzlich Gleichgewichtsstrategien unter Ungewissheit über den Versuch der Beeinflussung der situationsabhängigen Budgetgleichung der Wirtschaftssubjekte in einer Periode verändert werden können. Herausgestellt werden sollen auch gerade die Fälle der Nichtbeeinflußbarkeit. Dagegen wird nicht die Art der Änderung der Gleichgewichtskonstellation untersucht. Nun unterscheiden sich aber die Budgetgleichungen beliebiger Perioden nicht wesentlich (vgl. z.B. S.39). Damit erscheint eine exemplarische Darstellung der Fragestellung am Einperiodenfall aus Vereinfachungsgründen gerechtfertigt. Man stelle sich z.B. die betrachtete Periode als letzte des Planungszeitraums vor, dies ist jedoch nur erforderlich, soweit Aussagen über das "Wie" der Veränderung der Gleichgewichtswerte für den Einperiodenfall beabsichtigt sind. Aus Anschaulichkeitsgründen wird als Ausgangspunkt die Ermittlung des Tauschgleichgewichts für die verschiedenen Marktsysteme unter Ungewissheit im Einperiodenfall dargestellt.[3]

1) Adäquates Instrumentarium der Mehrperiodenplanung für den 'Sequenzenfall der Märkte' ist die stochastische Programmierung, vgl. S. 34, insbesondere FN 2.

2) Ähnlich argumentiert auch A. Sandmo (1974), S. 34. Im Übrigen sei auch nochmals auf E.F. Fama (1970) hingewiesen, vgl. oben S. 34, FN 2.

3) Während bezüglich der Darstellung von Gleichgewichtsstrategien - als nicht unter die Aufgabenstellung fallend - auf den bereitsoben zitierten Artikel von J.B. Long Jr. (1972a) verwiesen wird. Bezüglich der Problematik der Sequenzenoptimierung vgl. J.H. Drèze (1972), S. 14 und (1974), S. 18.

1.2.3 Das Tauschgleichgewicht im Einperiodenfall

Welchen Verbrauchsplan der Haushalt bei Vorliegen von Ungewißheit anhand seiner Zielfunktion als besten wählt, hängt ab von der individuellen Anfangsausstattung, von den vorhandenen Märkten, den dort herrschenden Preisen, und von der individuellen Präferenzordnung, die ihrerseits wiederum von der subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der ungewissen Ergebnisse beeinflußt ist.
Die Lösung dieses Problems im A-D-Modell mit den Zwischenstationen 'Ermittlung der individuellen und gesamtwirtschaftlichen Nettonachfragefunktionen' hin bis zum 'Gleichgewichtspreissystem' ist zum großen Teil analog der Herleitung des Tauschgleichgewichts in der traditionellen[1] mikroökonomischen Theorie und wird insoweit vergleichsweise knapp wiedergegeben.

$N = T = 1$ und $S > 1$ vorausgesetzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden: vollständiges und beschränktes Marktsystem.

1.2.3.1 Vollständiges Marktsystem

Der Optimierungsansatz lautet:
Der Haushalt i $(i = 1,\ldots,I)$ maximiert den Erwartungswert seines Nutzens durch geeignete Strukturierung seiner zustandsabhängigen Ansprüche unter Einhaltung der Budgetrestriktion. Dabei ist zu beachten, daß bezüglich Angebots- und Nachfragemengen eine einmalige Festlegung erfolgt. Die Kontrakte werden im Zeitpunkt $t = 0$ abgeschlossen. Im Zeitpunkt $t = 1$ werden nur noch die Verträge gemäß dem eingetretenen Zustand abgewickelt.[2]

---

1) Vgl. z.B. J.M. Henderson & R.E. Quandt (1971) oder R. Richter (1970).

2) Der Fall $T > 1$ erfährt im vollständigen Marktsystem eine völlig analoge Behandlung. Die einzige Unterscheidung zum Fall $T = 1$ ist die Ausweitung der Güterdimension auf $K' = KT$. Vgl. auch S.55 , FN 2 .
Die allgemeinen Überlegungen hierzu siehe Abschn. 1.2.2.2, S. 23 ff.

Formal:

$$\text{Max } U_i(\omega) = U_i\left[x_i = \left((\xi_{io},\xi_{i11}),\ldots,(\xi_{io},\xi_{i1S})\right);\pi_{i1},\ldots,\pi_{iS}\right]$$

$$= Eu_i(x_i) = \sum_s \pi_{is} u_i(\xi_{io},\xi_{i1s})$$

unter der Nebenbedingung

$$w_i = \bar{\xi}_{io} + \sum_s \phi_s \bar{\xi}_{i1s} = \xi_{io} + \sum_s \phi_s \xi_{i1s}$$

Symbolik:

ξ_{ik} von Haushalt i verbrauchte Menge des standardisierten Konsumgutes Nr. k, $k = 0$, bzw. $1s$.

$\bar{\xi}_{ik}$ Anfangsausstattung des Haushalts i an Gut Nr. k .

ϕ_{1s} Preis des Gutes 1_s in Einheiten des Gutes Nr. 0.

In diesem Modell ist die Ungewißheit exogen (parametrisch), was in der Ungleichheit der $\bar{\xi}_{i1s} \neq \bar{\xi}_{i1s'}$ bzw. $\sum_i \bar{\xi}_{i1s} \neq \sum_i \bar{\xi}_{i1s'}$,[1] für alle $s,s' \in \{1,\ldots,S\}$ zum Ausdruck kommt.[2]

Während im vollständigen System die Orientierung im Unternehmungsbereich[3] allein anhand der Marktdaten und der jedem Zustand zugeordneten Mengen erfolgt, die Unternehmungen also keine Vorstellungen darüber benötigen, wie wahrscheinlich ein ungewisses Produktionsergebnis ist, ist für die Haushalte bei ihrer Planung eine Wahrscheinlichkeitsvorstellung unumgänglich[4] zwecks Bildung der zu maximierenden Funktion.

---

1) Vgl. diesbezüglich auch K.J. Arrow, F.H. Hahn (1971), S.122f.

2) Im Folgenden werden der Einfachheit halber - solange keine Verwechslung möglich scheint - die Indices $t = 1$, sowie i vernachlässigt.

3) Der Optimierungsansatz der Unternehmungen im vollständigen System (Einperiodenfall) lautet

$$\text{Max}(y_o + \sum \phi_s y_s) \quad , \qquad s = 1,\ldots,S$$

unter der Nebenbedingung der Produktionsfunktion

$$F(y_o, y_1, \ldots, y_S) = 0 \quad ,$$

vgl. z.B. J. Hirshleifer (1970), S. 259. Vgl. hierzu auch Einleitung.

4) Siehe auch R. Radner (1968), S. 34.

Die Optimalbedingungen erster Ordnung[1] für Haushalt i lauten:

$$\frac{d\xi_s}{d\xi_o} = -\frac{\sum_s \pi_s \frac{\partial u}{\partial \xi_o}}{\pi_s \frac{\partial u}{\partial \xi_s}} = -\frac{1}{\phi_s} \quad , \quad s = 1,..,S \quad .^{2)}$$

$$w = \xi_o + \sum_s \phi_s \xi_s \qquad \text{(S+1 Gleichungen)}$$

Es gilt:

Die Grenzrate der Substitution des Gegenwartsgutes durch ein beliebiges nach (der Zeit und) dem Zustand charakterisiertes Gut ist dem Betrag nach gleich dem reziproken Preisverhältnis der beiden Güter ($\phi_o = 1$).

Aus den Optimalbedingungen errechnen sich die individuellen Nachfragen nach den Elementaransprüchen als Funktion des individuellen Vermögens, der subjektiven Wahrscheinlichkeitsvorstellungen und der S Marktpreise

$$\xi_k = \xi_k(w;\pi_1,\ldots,\pi_S;\ \phi_1,\ldots,\phi_S)^{3)} \quad , \quad k = 0,1,\ldots,S \quad .$$

Die Bedingungen für das Tauschgleichgewicht auf den S + 1 Märkten lauten:

$$\sum_i \xi_{ik} = \sum_i \bar{\xi}_{ik} \qquad i = 1,\ldots,I \quad , \quad k = 0,1,\ldots,S \ .$$

Unter geeigneten Annahmen[4] existiert eine Lösung dieses Gleichungssystems in S linear unabhängigen Gleichungen und Unbekannten derart, daß sich S Gleichgewichtspreise

$$\phi^* = (\phi_1^*,\ldots,\phi_S^*) > 0$$

---

1) Auf die Herleitung der Optimalbedingungen zweiter Ordnung kann wegen der Annahme der Konkavität der Nutzenfunktion verzichtet werden. Diesbezüglich vgl. z.B. G.O. Bierwag & M.A. Grove (1968), sowie J. Ebel (1971).

2) Im Fall T > 1 werden diese Optimalbedingungen einfach auf das T-Fache vervielfacht, ebenso die Marktgleichungen und -preise.

3) Auf die Analyse der Abhängigkeit der Nachfragefunktionen von Vermögen- und Preisänderungen wird verzichtet, da sie nicht eigentlicher Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist. Zwecks diesbezüglicher elementarer Information vgl. J. Hirshleifer (1970), S. 254. Zu den Slutskygleichungen - asset-Systeme betreffend - vgl. z.B. S. Fischer (1972), und die dort angegebene Literatur.
Vgl. in diesem Zusammenhang auch S. 78, FN 2.

4) Diesbezüglich wird auf G. Debreu (1959), Abschn. 5.7 (S. 83 f.), 6.3 (S. 94) und 7.7 (S. 102) verwiesen. Zur Existenz des Gleichgewichts im Marktfolgensystem vgl. R. Radner (1972).

ermitteln lassen und die individuellen zu den Gleichgewichtspreisen realisierbaren Pläne (Gleichgewichtsgütervektoren) ausgehend von einer bestimmten Ausgangsverteilung paretooptimal sind.[1)]

Zu diesen Bedingungen gehört Quasikonkavität des Bernoulli-Nutzens $U(x)$.[2)]

Allgemein gilt: Die Konkavität einer Funktion ist hinreichend für ihre Quasikonkavität, jedoch nicht notwendig. In bestimmten Fällen jedoch - so für die Funktion 'Bernoulli-Nutzen' - setzt Quasikonkavität ihrerseits als notwendige Bedingung Konkavität der entsprechenden Funktion voraus. Die Konkavität des Bernoulli-Nutzens ist äquivalent der Konkavität der elementaren Nutzenfunktion $u(x)$, was wiederum der Konvexität der elementaren Indifferenzflächen bzw. der Annahme der Risikoaversion entspricht. Aus der Quasikonkavität der Nutzenfunktion bei Ungewißheit für alle möglichen Fälle folgt auch Konkavität von $u(x)$ und damit von $U(x)$. Dies zusammengenommen ist gleichbedeutend damit, daß Vorliegen von Risikoaversion als 'nearly equivalent' zu Quasikonkavität betrachtet werden kann.[3)] Der Beweis dafür wird im Folgenden für den K-dimensionalen Güterraum geführt. Zu diesem Zweck seien die vorangegangenen Überlegungen nochmals zusammengefaßt in dem

Satz 1/2: Für die Existenz eines inneren Paretooptimums in einer Tauschwirtschaft bei Ungewißheit ist die Quasikonkavität der Nutzenfunktion $U(x)$ erfor-

---

1) Ein totales Marktgleichgewicht heißt paretooptimal, wenn es kein anderes solches realisierbares Marktgleichgewicht gibt, dessen Nutzen für mindestens einen Haushalt größer und für keinen der übrigen Haushalte kleiner ist. Das totale Konkurrenzgleichgewicht bei Sicherheit ist paretooptimal.
Vgl. z.B. R. Richter (1970), S. 138 f. Allgemein zum Begriff der Paretooptimalität vgl. auch S.[88] FN 3.

2) Vgl. G. Debreu (1959), S. 84, sowie K.J. Arrow (1964), S. 92, insb. S. 93 zum Beweis. Dabei heißt $U(x)$ quasikonkav, wenn aus $U(x_1) > U(x_2)$

$$U(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq U(x_2) \quad \text{für alle} \quad \alpha,\ 0 < \alpha < 1$$

folgt. Zur allgemeinen Definition vgl. S. 59.

3) Vgl. R. Guesnerie und Th. de Montbrial (1974), S. 65 f.: "The quasiconcavity ... is 'nearly equivalent' to risk aversion."

derlich. Hinreichend hierfür ist die Annahme von Risikoaversion. Umgekehrt ist Risikoaversion zwar für bestimmte, jedoch nicht für alle Fälle der Quasikonkavität erforderlich.[1)]

In einem ersten Schritt soll die Gleichheit zwischen 'Konvexität der elementaren Indifferenzflächen' und 'Risikoaversion' verdeutlicht werden.

(1) Allgemein bedeutet 'Konvexität der Menge nutzengleicher Konsumpläne':
Mit $u(x_1) = u(x_2)$, x_1, x_2 aus dem (sicheren) N-dimensionalen Güterraum gilt

$$\alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2) < u\left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right] \text{ für alle } \alpha, 0<\alpha<1, \quad ^{2)}$$

d.h. $\quad x_1 \; \alpha \; x_2 \prec \alpha \; x_1 + (1-\alpha) \; x_2$.

In Worten: Der Nutzen aus dem Spiel "Ergebnis x_1 mit der Wahrscheinlichkeit α, Ergebnis x_2 mit der Gegenwahrscheinlichkeit" (Erwartungswert des Nutzens) ist niedriger als der Nutzen der sicheren Güterkombination $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Dies entspricht aber der Definition von Risikoaversion.[3)] Ein Sicherheitsäquivalent für $x_1 \; \alpha \; x_2$ ist damit z.B. $x_1' = \lambda_1 x_1$, $0<\lambda_1<1$ für den Fall $u(x_1) > u(x_2)$.

Mit der Konkavität der elementaren Nutzenfunktion ist auch die beliebiger Erwartungswerte darüber gegeben (und umgekehrt). (Auf den Beweis sei hier verzichtet.)

---

1) Vgl. ein Beispiel bei K.J. Arrow (1964), S. 95, sowie R. Guesnerie und Th. de Montbrial (1974), S. 66. Quasikonkavität ohne Risikoaversion ist jedoch nach J.H. Drèze (1971) durch die Einführung fairer Wetten stets herstellbar, vgl. auch R. Guesnerie & Th. de Montbrial (1974).

2) Dies ist zugleich die Definition der Konkavität der elementaren Nutzenfunktion.

3) Vgl. z.B. H. Schneeweiß (1967), S. 45, Risikoaversion ist hier auch allgemeiner zu definieren, z.B. für $x_1 \succ x_2$. Siehe auch S.41.
Der Zusammenhang sei für den Fall $S = 2$ nochmals verdeutlicht. Bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zustände 1,2 und variablen Gütermengen läßt sich eine Indifferenzkurve im gewohnten 2-Güterdiagramm darstellen. Die Konvexität einer solchen Indifferenzkurve

In einem zweiten Schritt ist nun zu zeigen, daß die Konkavität der elementaren Nutzenfunktion $u(x)$ notwendig ist für bestimmte Formen der Quasikonkavität von $U(x)$, insgesamt also Risikoaversion und Quasikonkavität in etwa dekkungsgleiche Bedingungen sind.

FN 3), S. 57.

ist nach obigen Überlegungen hinreichend für die Annahme von Risikoscheu.

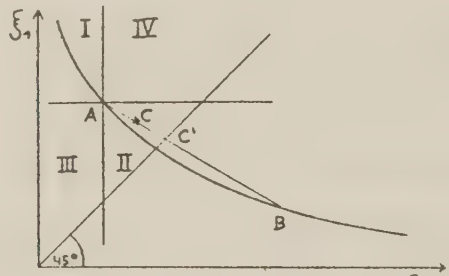

Fig. 3

Gehen wir von einem ungewissen Anspruch $A = (\xi_1^A, \xi_2^A; \pi)$ aus. Gesucht sind die zu A nutzenäquivalenten Ansprüche; sie liegen den Bereichen I und II, die Grenzen ausgeschlossen. Hinsichtlich des Bereichs III (IV) ist A dominant (wird A dominiert) (Unersättlichkeitsannahme). Die zu A indifferenten Ansprüche werden mehr von der einen Komponente (ξ_1 oder ξ_2) und weniger von der anderen Komponente (ξ_2 oder ξ_1) enthalten. Damit ergibt sich als Zwischenergebnis ein fallender Verlauf der Indifferenzlinien.
Sei z.B. $B = (\xi_1^B, \xi_2^B; \pi)$ äquivalent zu A. Risikoscheu vorausgesetzt, liegen alle zu A und B äquivalenten Ansprüche links von der Verbindungsstrecke $\overline{AB}$. Das läßt sich wie folgt zeigen

Vorausgesetzt sei Risikoaversion.
Sei nun angenommen, das Indifferenzkurvenstück zwischen A und B sei nicht konvex. Dann gilt für jeden Punkt C auf der Verbindungsstrecke $\overline{AB}$

$$C = \alpha A + (1-\alpha)B \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$
$$C \precsim A \quad \text{bzw.} \quad C \precsim B \quad ,$$

d.h. z.B. $U(\alpha A + (1-\alpha)B) \leq U(A)$.
Es ist aber

$$A \sim A\alpha B \quad ,$$

α jetzt als Wahrscheinlichkeit interpretiert, da

$$U(A\alpha B) = \alpha U(A) + (1-\alpha)U(B) = U(A).$$

Also ist $U(\alpha A + (1-\alpha)B) \leq U(A\alpha B)$.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme der Risikoaversion, denn das gerade Gesagte gilt auch für den Punkt
$C' = \alpha' A + (1-\alpha')B$ mit einem α' derart, daß $\xi_1^{C'} = \xi_2^{C'}$ (sicheres Ereignis).
Somit müssen alle Punkte beliebiger Kurvenstücke AB links von der Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ liegen. Hinreichend hierfür aber ist die Annahme der Konvexität der Indifferenzlinie.
Vgl. auch S.45.

(2) Eine Funktion $f(\xi_1,\ldots,\xi_{NS})$ heißt quasikonkav,[1] wenn für jedes beliebige Paar $(\xi_1^1,\ldots,\xi_{NS}^1)$, $(\xi_1^2,\ldots,\xi_{NS}^2)$ mit $f(\xi_s^1) \geq f(\xi_s^2)$ gilt

$$f(\alpha\xi_1^1+(1-\alpha)\xi_1^2,\ldots,\alpha\xi_{NS}^1+(1-\alpha)\xi_{NS}^2) \geq f(\xi_1^2,\ldots,\xi_{NS}^2)$$

für alle α , $0 \leq \alpha \leq 1$.[2]

Angewendet auf die Nutzenfunktion heißt dies - wie schon auf S.56 in FN 2 angedeutet -: Ein Anspruch, der in jeder Komponente eine (feste) Mischung (hier als Wahrscheinlichkeit zu interpretieren) aus den beiden Ansprüchen x_1 und x_2 mit $U(x_1) \geq U(x_2)$ enthält, ist mindestens gleichwertig dem minderen Anspruch.

Sei[3] $g(\xi_1^1,\ldots,\xi_N^1,\xi_1^2,\ldots,\xi_N^2)=\frac{1}{2} f(x_1)+\frac{1}{2} f(x_2)$ quasikonkav,

mit $f(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ nicht konkav,

d.h. es existieren x_1, x_2 und α derart, daß

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \text{ mit } 0<\alpha<1, \text{z.B. } \alpha=\tfrac{1}{2} .$$

Es ist $g(\xi_1^1,\ldots,\xi_N^1,\xi_1^2,\ldots,\xi_N^2) = g(\xi_1^2,\ldots,\xi_N^2,\xi_1^1,\ldots,\xi_N^2)$.

Wegen der Annahme der Quasikonkavität gilt

$$(1\text{-}1)\quad g\left(\frac{\xi_1^1+\xi_1^2}{2},\ldots,\frac{\xi_N^1+\xi_N^2}{2}\,,\,\frac{\xi_1^2+\xi_1^1}{2},\ldots,\frac{\xi_N^2+\xi_N^1}{2}\right) \geq g(\xi_1^1,\ldots,\xi_N^1,\xi_1^2,\ldots,\xi_N^2) .$$

---

1)Zur Definition vgl. K.J. Arrow (1964), S. 92.

2)Dieselbe Funktion heißt dagegen konkav, wenn gilt:

$$f(\alpha\xi_1^1+(1-\alpha)\xi_1^2,\ldots,\alpha\xi_{NS}^1+(1-\alpha)\xi_{NS}^2) \geq \alpha f(\xi_1^1,\ldots,\xi_{NS}^1) + (1-\alpha)f(\xi_1^2,\ldots,\xi_{NS}^2) .$$

3)Der Beweis ist von K.J. Arrow (1964) übernommen, vgl. auch R. Guesnerie und Th. de Montbrial (1974), S. 64 f.

Andererseits ist hier speziell

$$g\left(\frac{\xi_1^1+\xi_1^2}{2},\ldots,\frac{\xi_N^1+\xi_N^2}{2}\ ,\ \frac{\xi_1^2+\xi_1^1}{2},\ldots,\frac{\xi_N^2+\xi_N^1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\xi_1^1+\xi_1^2}{2},\ldots,\frac{\xi_N^1+\xi_N^2}{2}\right) + f\left(\frac{\xi_1^2+\xi_1^1}{2},\ldots,\frac{\xi_N^2+\xi_N^1}{2}\right)\right]$$

$$= f\left(\frac{\xi_1^1+\xi_1^2}{2},\ldots,\frac{\xi_N^1+\xi_N^2}{2}\right)$$

$$< \frac{1}{2}\left[f(\xi_1^1,\ldots,\xi_N^1) + f(\xi_1^2,\ldots,\xi_N^2)\right] \quad \text{(wegen Annahme der Nichtkonkavität von f(...))}$$

$$= g(\xi_1^1,\ldots,\xi_N^1,\xi_1^2,\ldots,\xi_N^2) \quad \text{(gemäß Definition).}$$

Dies widerspricht aber der Annahme der Quasikonkavität (Gleichung (1-1), S.59.

Somit ist neben der Stetigkeits- und Unersättlichkeitsannahme bezüglich des Bernoulli-Nutzens die Annahme der Risikoaversion hinreichend und ("fast") notwendig für die Existenz eines Paretooptimums bei Tausch unter Ungewißheit.

1.2.3.2 Der Ansatz von Arrow

Das vollständige elementare Marktsystem als Abbild der ungewissen Realität?[1] Diese Frage verneint schon Arrow: Zugleich mit der Vorstellung des Modells[2] bietet er eine äquivalente Transformation desselben an, die als Abstraktion des tatsächlichen Verhaltens der Wirtschaftssubjekte eher geeignet erscheint.
Die Arrowsche Transformation ist eine 'Transformation der Ungewißheit', deren Kenntnis für die Wirtschaftssubjekte mit einem anderen (vermutlich geringeren?) Aufwand verbunden ist als die der ursprünglich angenommenen Form der individuellen

---

1) Unter dieser Fragestellung ist auch die Diskussion der 'assets' in Abschn. 1.2.2.2, S.26 ff.zu sehen.

2) K.J. Arrow (1964).

Ungewißheit. Die Informationskosten der letzteren wirken im allgemeinen prohibitiv auf die Einrichtung der Märkte für zustandsabhängige Elementaransprüche (vgl. auch S.14).

Dies soll nun durch die Gegenüberstellung der beiden Arrow-Versionen verdeutlicht werden. Arrow zeigt für den Fall der reinen Tauschwirtschaft mit $N > 1$, $S > 1$, $T = 1$,[1] daß

- für das vollständige Elementarsystem (Version 1) unter geringfügigen Modifizierungen (vgl. hierzu auch 1.2.3.1) ein paretooptimaler Gleichgewichtszustand für die Wirtschaft existiert,
- ein bestimmtes Marktfolgensystem (Version 2) zum gleichen gesamtwirtschaftlichen Ergebnis wie Version 1 führt.

Version 1

Gegeben sind I individuelle Verteilungen über Erstausstattungen

$$\omega_i = (\xi_{ins};\pi_{is}) = (x_{is};\pi_{is}) \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,I \\ n = 1,\ldots,N \\ s = 1,\ldots,S \end{matrix}$$

Es existieren NS Märkte mit den Preisen ϕ_{ns} .

Aus der Maximierung des Bernoulli-Nutzens unter der Nebenbedingung der Budgetrestriktion resultieren NS individuelle Verbrauchsplankomponenten bei gegebenen Geldpreisen ϕ und gegebenen $\bar{x}_i$; daraus ergibt sich unter den üblichen Bedingungen ein Marktgleichgewicht[2]

$$\sum_i \xi_{ik} = \sum_i \bar{\xi}_{ik} = \bar{\xi}_K \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,I \\ \text{für alle} \quad K = 1,\ldots,NS \end{matrix}$$

zu dem Gleichgewichtspreisvektor $\phi^x = (\phi^x_{11},\ldots,\phi^x_{NS})$.

---

1) Es gibt hierbei keine Gegenwartsgüter, wodurch - wie noch zu zeigen sein wird - der Charakter der subjektiven Ungewißheit klarer herausgestellt wird.

2) Zur Herleitung sowie zu den Bedingungen und Eigenschaften, vgl. Abschn. 1.2.3.1 .

Die Gleichgewichtslösung ist unabhängig davon, ob die Anfangsausstattung der Haushalte in w_i oder in dem Geldeinkommen $y_i = \phi \cdot \bar{x}_i^{\tau}$ ausgedrückt wird.

Während in dieser Version Geld keine andere Funktion als die der Recheneinheit hat - alle Verträge werden in einem vor $t = 1$ liegenden Zeitpunkt abgeschlossen und dann in $t = 1$ abgewickelt - werden in der Version 2 Geldeinheiten gehandelt und als Wertaufbewahrungsmittel - genauer als Möglichkeit der Anspruchstransformation - verwendet.

Version 2

Gegeben ist die Verteilung der Geldbeträge y_i in $t = 0$ mit

$$\sum_i y_i = y \quad .$$

In $t = 0$ existieren S Titelmärkte mit den Preisen $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_S)$, wobei der Titel s dadurch gekennzeichnet ist, daß er - falls in $t = 1$ der Zustand s eintritt - eine Geldeinheit 'bringt', in allen übrigen Zuständen dagegen verfällt.
In $t = 1$ existieren dann wieder bei gegebenem Zustand $\bar{s}$ N Gütermärkte mit den Preisen $p_{\bar{s}} = (p_{1\bar{s}}, \ldots, p_{N\bar{s}})$,[1] wobei gilt

$$\phi_{ns} = \psi_s \cdot p'_{ns} \qquad \begin{matrix} n = 1, \ldots, N \\ s = 1, \ldots, S \end{matrix} \quad .$$

Die Haushalte erwerben mit ihrem gegenwärtigen sicheren Geldbestand y_i auf den Titelmärkten eine unsichere morgige Geldverteilung

$$(y_{i1}, \ldots, y_{iS}; \pi_1, \ldots, \pi_S) \quad .$$

Wenn dann in $t = 1$ der Zustand $\bar{s}$ realisiert ist, tauschen sie mit ihrem $y_{i\bar{s}}$ zu den dann herrschenden Gleichgewichtspreisen $p_{\bar{s}}^{*}$ den von ihnen präferierten Verbrauchsvektor ein.

Formal läßt sich dies wie folgt darstellen:
Haushalt i maximiert in $t = 0$ den Erwartungswert seines

---

1) Gemessen in 'Geldeinheiten morgen in Zustand $\bar{s}$'.

Nutzens für $t = 1$

$$\text{Max} \quad U(\omega) = \sum_s \pi_s u(\xi_{1s},\ldots,\xi_{Ns})$$

unter der Nebenbedingung

$$(1\text{-}2) \qquad y_i = \sum_s \psi_s y_{is} = \sum_s \psi_s \sum_n \tilde{p}^{*}_{ns} \xi_{ns} \quad .^{1)}$$

Daraus ergeben sich neben der Nebenbedingung (1-2) NS - 1 Optimalbedingungen gemäß

$$\pi_s \frac{\partial u}{\partial \xi_{ns}} - \lambda \psi_s \tilde{p}^{*}_{ns} = 0$$

$$\frac{d\xi_{ns}}{d\xi_{11}} = - \frac{\pi_s \psi_s \tilde{p}^{*}_{11}}{\pi_1 \psi_1 \tilde{p}^{*}_{ns}} \quad .$$

Diese lassen sich umformen in

S(N - 1) Relationen

$$\frac{d\xi_{ns}}{d\xi_{ms}} = - \frac{\tilde{p}^{*}_{ms}}{\tilde{p}^{*}_{ns}} \qquad \text{und}$$

S-1 Relationen

$$\frac{dy_r}{dy_q} = - \frac{\psi_q}{\psi_r} \qquad , \; r,q \in \{1,\ldots,S\} \; .$$

Aus diesen letzten S-1 Relationen errechnet sich bei gegebenen subjektiven Wahrscheinlichkeiten bezüglich der S Zustände, bei gegebenen (erwarteten) Gleichgewichtspreisvektoren $\tilde{p}^{*}_{s}$, $s = 1,\ldots,S$, und bei gegebenen y_i die individuelle Nachfrage nach den Geldtiteln c.p. in Abhängigkeit von den Titelpreisen ψ als:

$$y^{*}_{is} = y_{is}(\psi) \quad .$$

Im Titelgleichgewicht gilt:

$$\sum_i y^{*}_{is}(\psi^{*}) = 0 \qquad \text{für alle } s \; ,$$

---

1) Dabei ist unter $\tilde{p}^{*}_{s} = (\tilde{p}^{*}_{1s},\ldots,\tilde{p}^{*}_{Ns})$ der für Zustand s subjektiv erwartete Gleichgewichtspreisvektor zu verstehen. Vgl. hierzu auch die nachfolgenden Bemerkungen, S. 65 f.

Der Zustand s ist in Version 2 gerade durch die Gleichgewichtskassapreise für die N Güter gekennzeichnet.

sowie $y_i = \sum_s \psi_s^x y_{is}^x$ für alle $i = 1,\ldots,I$.

Außerdem gilt:

$$\sum_s \psi_s^x y_{is}^x = \sum_s \psi_s^x \sum_n \tilde{p}_{ns}^x \xi_{ins}^x = \sum_n \sum_s \phi_{ns}^x \xi_{ins}^x = y_i \quad ,^{1)}$$

mit $\phi_{ns}^x = \psi_s^x \tilde{p}_{ns}^x$,

d.h. diese 'zweistufige Optimierung unter Ungewißheit' führt zu dem gleichen Gleichgewicht wie die 'einstufige Methode' (Version 1) und ist daher wie diese ein Paretooptimum.

Bemerkungen zu Arrows Ungewißheitsalternativen

Bei der Interpretation von Version 2 wurde ohne Kommentar (wie bei Arrow) angenommen, daß die Haushalte bei ihrer Optimierung die Terminpreise ϕ kennen. Diese Information liefert ihnen auf den ersten Blick jedoch nur Version 1 wegen der in diesem Fall existierenden Terminmärkte. Damit könnte man folgern[2)]: Nur mit Hilfe der in $t = 0$ gegebenen Marktpreise ψ für die Titel und dem nun ja nicht bekannten Terminpreisvektor ϕ lassen sich die morgigen Gleichgewichtskassapreise je Zustand ermitteln (vgl. K.J. Arrow (1964), S. 93), d.h. ohne Version 1 keine Version 2. Arrow unterliegt also einer Illusion, wenn er annimmt, die Reduktion der Märkte im obigen Sinne bedeute eine Vereinfachung des Informationssystems[3)] als Verringerung der Anzahl der notwendigen Märkte von NS auf $N+S$.

Es scheint jedoch eine andere Interpretation[4)] angebracht

---

1) Vgl. K.J. Arrow (1964), S. 93.
Die Budgetgleichung ist natürlich auch im Ungleichgewicht erfüllt, stets konsistente Planung vorausgesetzt.

2) Vgl. z.B. J. Ebel (1971), insb. S. 107.

3) Vgl. K.J. Arrow (1964), S. 94.

4) Vgl. hierzu K.J. Arrow & F.H. Hahn (1971), S. 122: "An individual who knows that information will become available to part of the market, but not to him, will be unable to enter into conditional contracts. But since he knows that future prices, in fact, will depend on this information, he treats them from his viewpoint as random variables." In diesem Sinne sind auch R. Radner (1968), S. 35 f, sowie (Forts. S. 65)

zu sein:
In Version 2 ist die Ungewißheit von Version 1 als individuelle Ungewißheit über die Ausstattung mit N-komponentigen Gütervektoren in eine äquivalente subjektive Ungewißheit über Gleichgewichts(kassa)preisvektoren der gleichen Dimension transformiert,[1)]

$$(\tilde{p}_1^{*},\ldots,\tilde{p}_S^{*}) \qquad s = 1,\ldots,S$$

mit $\tilde{p}_s^{*} = (\tilde{p}_{1s}^{*},\ldots,\tilde{p}_{Ns}^{*})$.

Nach dieser Interpretation wird mit Hilfe der Marktpreise ψ und der subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung über den morgigen Gleichgewichtspreisen ('future prices') - (auch hier sind die π_i subjektiv!) - auf die nun fiktiven, für die Optimierung der Haushalte erforderlichen Terminpreise ('futures prices') geschlossen.
Version 1 behandelt den Fall parametrischer Ungewißheit (vgl. hierzu ausführlich Abschn. 1.1.6, S. 11 ff.), Version 2 den analogen Fall der Transaktions-(hier Preis-)ungewißheit (S. 13 ff. oben).
Die Frage, welches Marktsystem eher realisierbar sein wird, reduziert sich dann auf die Frage nach den Informationskosten je Version.[2)]

Forts. FN 4, S. 64:

R. Guesnerie & Th. de Montbrial (1974), S. 60, zu lesen, vgl. insb. R. Radner (1968), S. 36: "In such a model each agent faces not only uncertainty about the environment but also about the outcome of his own future computations, about future prices (as distinct from "futures prices") and about the existence of various markets in the future."

1) Vgl. auch oben S. 15.
Diese dem A-D-Modell immanente Annahme wird hier besonders deutlich: Bei einer zusätzlichen Ausstattung mit dem 'sicheren' Gegenwartsgut besteht die Gefahr, ihre Bedeutung zu übersehen, hierzu auch oben S. 27 f.

2) Diese Frage soll hier offen bleiben. Zum Problemkreis vgl. insb. R. Radner (1968).

Die Überlegungen bezüglich des 'Risikos zweiten Grades' (vgl. oben, S. 27) - und damit auch Version 2 - könnten vernachlässigt werden, wenn Verträge stets eingehalten würden bzw. Regreß immer kostenlos möglich wäre. Es handelt sich hier also letztlich um ein Problem der Rechtssicherheit. Arrow selbst betont dies in einer späteren Arbeit.[1)] Tritt der Zustand $\bar{s}$ ein und damit ex definitione das zugehörige individuelle Gleichgewichtspreissystem, dann findet eine Umverteilung der individuellen Geldbeträge statt, und zwar genau so, wie sie in den in $t = 0$ vereinbarten Verträgen beschlossen wurden (hier besteht kein Ausfallrisiko!) und jeder Haushalt kann seinen geplanten = optimalen Gütervektor (≡ Plan der Version 1) realisieren. Insofern stellt Arrows Ursprungsmodell (Version 2) bereits den einfachsten Fall eines Marktfolgensystems dar (vgl. S. 30 ff.).
Die Überlegungen Arrows rechtfertigen auch die Konzentration auf den 1-Gut-Fall der Entscheidung unter Ungewißheit ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Ergebnisse.

---

1) K.J. Arrow (1974a), S. 8. Vgl. auch oben S. 28, FN 1.

1.2.3.3 Beschränktes System

Das beschränkte System ist die Folge des Handels mit assets. Zur Begründung wird auf Abschn. 1.2.2.2, S. 25 ff. verwiesen. Hier sei nur noch einmal das Wesentliche der dortigen Überlegungen zusammengestellt.

Ist das Marktsystem als asset-System ausgestaltet, dann werden zwar alle vorgegebenen zustandsbedingten Ansprüche gehandelt, jedoch nicht isoliert, sondern in Folge prohibitiver Informationskosten nur als Linearkombinationen. So kann die Anzahl der linear unabhängigen Kombinationen maximal so groß sein wie die der gehandelten Titel - in diesem Zusammenhang assets genannt. Das asset-System hat nicht die Schwächen des Elementarsystems, es kann in ihm jedoch so geschlossen werden, als ob ein solches vorliegen würde, da die Äquivalenz der beiden Konzepte nachweisbar ist.
Dabei sind prinzipiell zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist die Anzahl linear unabhängiger assets mindestens gleich der Anzahl der Zustände, liegt ein zum vollständigen System der Elementaransprüche äquivalentes Marktsystem vor.[1] Dieses ist Gegenstand von Abschn. 1.2.3.1.

Ist die Anzahl J der gehandelten assets kleiner als die der möglichen Zustände,[2] dann bilden diese Handelsobjekte als Elemente des S-dimensionalen Güterraums (vorausgesetzt, sie seien alle linear voneinander unabhängig) einen sog. 'Kegel' im $\mathbb{R}^J$: Ein Wirtschaftssubjekt kann maximal J Komponenten seines S-elementigen Gütervektors beliebig wählen; die übrigen S-J Elemente sind über die sog. Restriktionsmatrix M für den Zulässigkeitsbereich[3] festgelegt. M gibt an, in welchem Rahmen morgige ungewisse Güterkombinationen beliebig wählbar

1) Vorausgesetzt, Leerverkäufe seien zulässig und damit Arbitrageausgleich grundsätzlich möglich. Vgl. D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 151 f. Hierauf weist auch S. Fischer (1972), S. 372, hin.

2) Dieser Fall ist der realistischere.

3) Vgl. Abschn. 1.2.2.3, insb. S. 37 und 1.2.3.3, insb. S. 69 ff.

sind bei einer gegebenen Menge an Güterkombinationen als Handelsobjekten. Die Konstruktion von M wird im Folgenden - angelehnt an die Darstellung von S. Fischer (1972) - demonstriert, (S.69ff). Wir sprechen in diesem Fall von einem beschränkten (vollständigen)[1] (Markt-)System für das A-D-Modell.[2] 'Beschränkt' bedeutet, daß die Nachfrager ihren optimalen Güterplan unter Restriktion bezüglich des Zulässigkeitsbereichs wählen müssen, während das ungewisse Angebot die Ausstattung der assets bestimmt.[3]

Im Folgenden soll nun die Transformation eines Ungewißheitsproblems in vorgegebener asset-Form in das entsprechende beschränkte A-D-Elementarsystem aufgezeigt werden. Dabei wird analog zu den Überlegungen von S. Fischer (1972) vorgegangen. Unter den Fischerschen Voraussetzungen - die den unseren entsprechen - existiert genau eine 'Übersetzungsmöglichkeit'.[4]

Äquivalenz der Systeme

Gegeben sei ein asset-System, das wie folgt charakterisiert werden kann:
Gehandelt werden J linear unabhängige Gütervektoren γ_j[5] als Elemente des S-dimensionalen Güterraums (S > J)

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} \xi_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{jS} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi_{js} \geq 0 \text{ für alle } j,s \quad .$$

Seien mit $G = (\gamma_1, \ldots, \gamma_J)$ die asset-Ertragsmatrix

---

1) Zur Wahl des Begriffs vgl. S. 25, FN 2.

2) Unvollständigkeit des Marktsystems ist gegeben, wenn die Anzahl der linear unabhängigen Handelsobjekte kleiner ist als die Anzahl der Güter, die in die Nutzenfunktion eingehen. Vgl. hierzu die Seiten 29, 37, 38.

3) Vgl. auch Darstellung des Grundmodells der Risikoverteilung, Abschn.2.2.1.1 , S. 99.

4) Vgl. auch D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), insb. S. 149 ff.

5) Bei Fischer ist, abweichend von unserer Darstellung, der sichere Titel Bestandteil der Ertragsmatrix G, vgl. S. Fischer (1972).

und mit A_j der zu γ_j gehörende Preis, z.B. in heutigen Gütereinheiten, bezeichnet, dann sind

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \end{pmatrix} \text{ der Preisvektor für die assets}$$

und $A'\alpha = \sum_j A_j \alpha_j$ der Wert einer Assetkombination α,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{pmatrix}, \text{ wobei } \sum_i \alpha_{ij}\gamma_j = \gamma_j \text{ für alle } j.$$

Es wird nun behauptet[1]:

Zu jedem solchen asset-System existiert genau ein äquivalentes[2], beschränktes Marktsystem von Elementaransprüchen $E = \{e_j ; j = 1,\ldots,J\}$

- mit dem Preisvektor $\phi = \{\phi_1,\ldots,\phi_J, 0,\ldots,0\}$,[3] errechenbar aus

$$\phi G = A$$

- unter der Restriktion bezüglich der zulässigen Kombinationen aus $\{\xi_s\}$ darstellbar in der Form

$$Mx' = \mathcal{O}' \quad .[4]$$

Die Restriktionsmatrix M läßt sich mithilfe von G eindeutig bestimmen. $\mathcal{O}$ bezeichnet einen Spaltenvektor mit S Nullen.

a) Ermittlung von M

Die Ermittlung der Restriktion des Zulässigkeitsbereichs für x liefert die bei der Formulierung des Maximierungs-

1) Vgl. S. Fischer (1972), S. 372.

2) Dabei ist 'äquivalent' als 'gleiche Budget- und gleiche Zulässigkeitsbereichsrestriktion' zu verstehen.

3) Vgl. hierzu "Ermittlung von ϕ ", S. 72.

4) Beachte: Der Vektor x enthält nicht das Gegenwartsgut.

problems zu beachtende Abhängigkeit der Komponenten der zulässigen Konsumvektoren in Form eines Gleichungssystems. Dabei ist wie folgt vorzugehen:

Es gilt für jeden möglichen Verbrauchsplan

(1-3) $\quad x' = G\alpha \qquad$ (S Gleichungen).

G ist eine Matrix vom Rang J. Daraus folgt[1], daß sich G stets aufspalten läßt in

$$G = \begin{matrix} G_J \\ \hline G_{S-J} \end{matrix}$$

mit G_J als einer Matrix mit J linear unabhängigen Zeilenvektoren[2] $(\xi_{s'1},\ldots,\xi_{s'J})$, $s' = 1,\ldots,J$, - also G_J nicht singulär - und mit G_{S-J} als einer (S-J) x J-Matrix.

Dann gilt per Definition

$$x'_J \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_J \end{pmatrix} = G_J\alpha \qquad \text{(J Gleichungen)},$$

sowie

$$x'_{S-J} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \xi_{J+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_S \end{pmatrix} = G_{S-J}\alpha \qquad \text{(S-J Gleichungen)}.$$

Nun sind wegen G_J nicht singulär die Spaltenvektoren von G_J ebenfalls linear unabhängig, bilden damit eine Basis im $\mathbb{R}^J$, und der Vektor α läßt sich als Linearkombination der Elementaransprüche e_j darstellen:

$$\alpha = G_J^{-1}x'_J E_J \quad .[3]$$

---

1) Gemäß einem Satz aus der linearen Algebra.

2) Ein solches G_J läßt sich stets durch geeignete Umnumerierung der Zustände herstellen.
Zur Erläuterung vgl. auch das Beispiel auf S. 72 f.

3) E_J: Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^J$.

Für die S-J Komponenten eines Verbrauchsvektors, die nicht Elemente der Basis $\{x_J\}$ sind, gilt ebenfalls

$$x'_{S-J} = G_{S-J}G_J^{-1}x'_J E_J \quad .$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem Zusammenhang

$$\left(-G_{S-J}G_J^{-1} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right) x' = \sigma \quad ,$$

wobei $\left(-G_{S-J}G_J^{-1} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right) \equiv M$ [1]

definiert sei. Durch beliebige Zeilenoperationen läßt sich

$$Mx' = \sigma$$

umformen, ohne daß sich der darin enthaltene Zusammenhang ändert, so wie M auch durch solche Operationen aus dem ursprünglichen Restriktionssystem (1-3) hervorgegangen ist.

In ausführlicher Schreibweise lautet die Restriktion des Zulässigkeitsbereichs:

implizit: [2]

$$Mx' = \left(-\begin{pmatrix} \xi_{1,J+1} & \cdots & \xi_{J,J+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1S} & \cdots & \xi_{JS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{J1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1J} & \cdots & \xi_{JJ} \end{pmatrix}^{-1} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sigma$$

explizit:

$$x'_{S-J} = \begin{pmatrix} \xi_{J+1} \\ \vdots \\ \xi_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1,J+1} & \cdots & \xi_{J,J+1} \\ \vdots & & \\ \xi_{1S} & \cdots & \xi_{JS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{J1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1J} & \cdots & \xi_{JJ} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

---

1) Beachte: Für J = S existiert M nicht. Dort gilt $a = G^{-1}x'$. M ist eine (S-J) x S - Matrix, deren Komponenten $\xi_{js} = 1$ sind für $j = 1,\ldots,S-J$ und $s = S-J,\ldots,S$.

2) Die Zustände sind - falls notwendig - umnumeriert, vgl. auch Beispiel unter c).

b) Ermittlung von ϕ

Aus der Voraussetzung

$$\phi x' = A\alpha$$

folgt wegen $x' = G\alpha$

$$\phi G = A$$

oder ausführlich

$$(\phi_1,\ldots,\phi_S)\begin{pmatrix} \xi_{11}\cdots\xi_{J1} \\ \vdots \\ \xi_{1S}\cdots\xi_{JS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Gleichungssystem in S Unbekannten ϕ_s und in J linear unabhängigen Gleichungen mit den Parametern G und A. Es läßt sich lösen nach J beliebigen ϕ_s in Abhängigkeit von den A_j und den restlichen $(S-J)\phi_s$. Werden diese letzteren mit 0 angesetzt (Die zugehörigen Titel werden in dem gemäß a) zu ermittelnden Elementarmarktsystem ja auch nicht gehandelt!), so ergibt sich ein eindeutiger Lösungsvektor für ϕ.[1)]
Damit ist gezeigt, daß jedes Problem des ungewissen Güterangebots, das als asset-Problem darstellbar ist, in ein äquivalentes unvollständiges Elementaranspruchssystem transformiert werden kann.

c) Beispiel

Zur Erläuterung diene das folgende Beispiel:

Seien $j = 1,2$, $s = 1,2,3$, $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 100 \\ 105 \end{pmatrix}$.

ca) Ermittlung der Restriktionsmatrix M

Für jeden Konsumvektor gilt das Gleichungssystem

$$x' = G\alpha \quad ,$$

---

1) Der in einzelnen Komponenten bei gegebenem positivem A ohne weiteres negativ sein kann.

hier: $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

Daraus errechnen sich gemäß obiger Überlegung

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} x'_J = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi 3 \end{pmatrix}$$

und

$$M = \left[-(2,2) \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \middle| 1 \right] = (-\tfrac{2}{3}, 0, 1) \quad .$$

Aus

$$M \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0$$

ergibt sich dann das Restriktionsgleichungssystem, hier aus einer Gleichung bestehend, nämlich

$$\xi_2 = \tfrac{2}{3}\xi_1 \quad .^{1)}$$

cb) Ermittlung von ϕ:

Infolge der Vorgabe der Budgetrestriktion gilt:

$\phi x' = A\alpha$

$\phi G = A$ (wegen $x' = G\alpha$) .

Hier: $3\phi_1 + 2\phi_2 + 4\phi_3 = 100$

$3\phi_1 + 2\phi_2 + 5\phi_3 = 105$.

Daraus errechnen sich

$$\phi_1 + \tfrac{2}{3}\phi_2 = 100 \Rightarrow \phi_1 = \tfrac{80}{3} \quad \text{bei } \phi_2 = 0$$

$$\phi_3 = 5 \quad .$$

---

1) Was sich übrigens direkt aus der Gewinnmatrix erkennen läßt. Das Beispiel wurde so einfach gewählt, um diese direkte Probe des Vorgehens nachvollziehen zu können.

Optimierungsansätze

Für den Fall $t = 1$ lautet der Optimierungsansatz für den Haushalt i bei Vorliegen eines beschränkten Marktsystems[1)]

a) in asset-Form

$$\underset{\{a_{ij}\}}{\text{Max}} \quad Eu(\xi_o,\xi_1) = \sum_s \pi_s u(\xi_o,\xi_{1s}) \qquad \begin{matrix} j = 1,\ldots,J \\ s = 1,\ldots,S \\ J < S \end{matrix}$$

unter der Nebenbedingung der Budgetrestriktion

$$w_i = \xi_o + \sum_j A_j a_{ij}$$

und für den Zulässigkeitsbereich

$$\xi_{is} = \sum_j \xi_{js} a_{ij} \qquad s = 1,\ldots,S \quad .^{2)}$$

b) im Elementarmarktsystem

$$\underset{\{\xi_o,\xi_{1s}\}}{\text{Max}} \quad Eu(x) = \sum_s \pi_s u(\xi_o,\xi_{1s})$$

unter der Nebenbedingung der Budgetrestriktion

$$w = \xi_o + \sum_s \phi_s \xi_{1s}$$

und der Zulässigkeitsbereichsrestriktion

$$Mx' = \mathfrak{o} \quad .^{3)}$$

---

1) Annahmen und Symbolik grundsätzlich wie im vollständigen System, vgl. oben S. 53 ff.

2) Die Menge der individuell möglichen Portefeuillevektoren a ist für den asset-Fall definiert als

$$B_a = \left\{ a_i \,\middle|\, \sum_j A_j a_{ij} \leq w_i - \xi_o \,,\ a_i \in \mathbb{R}^J \right\},$$

die Menge der zulässigen 'Verbrauchspläne morgen'

$$Z_a = \left\{ x \,\middle|\, x' = Ga \,,\ a \in \mathbb{R}^J,\ x \in \mathbb{R}^S,\ x \geq 0 \right\}.$$

3) Zur Ermittlung der Restriktionsmatrix M vgl. oben S. 69 ff. Die Menge der zulässigen 'Verbrauchspläne morgen' läßt sich erfassen als

$$Z_b = \left\{ x \,\middle|\, x \in X \text{ und } Mx' = \mathfrak{o} \right\},$$

die der im Rahmen des Budgets möglichen Gütervektoren als

$$B_b = \left\{ x \,\middle|\, \phi x' = w - \xi_o,\ x \in X \right\}.$$

Vgl. hierzu auch das Beispiel in Abschn. 1.2.2.3, S. 37.

Herleitung der Optimalbedingungen[1)]

Fall a)

Durch Substitution der Argumente der Zielfunktion durch die Aktionsparameter mithilfe der Nebenbedingungen ergibt sich nach der Differentiation folgendes Gleichungssystem, interpretierbar als individuelles Nachfragesystem für die α_j (Das redundante ξ_o errechnet sich aus der Budgetgleichung):

$$(1\text{-}4)\quad -A_j \sum_s \pi_s \frac{\partial u}{\partial \xi_o} + \sum_s \pi_s \xi_{js} \frac{\partial u}{\partial \xi_{1s}} = 0 \qquad j = 1,\ldots,J \quad .$$

Ganz allgemein gilt:

Die aus der Nachfrage nach ungewissen Gütern abgeleitete individuelle Nachfrage nach Wertpapieren ist bei gegebenen individuellen Risiko- und Zeitpräferenzen eine Funktion des individuellen Anfangsvermögens w_i, der Ertragsmatrix der Unternehmungen G, sowie der Wertpapierpreise A_j und - grob gesprochen - des Wertpapierangebots bei gegebenem realem Angebot. Was nun die Abhängigkeit der individuellen Wertpapiernachfrage (und damit des Wertpapiermarktgleichgewichts) vom Wertpapierangebot betrifft, so steht dieses Problem im Kern der Überlegung des angewandten Teils. Hier sei nur schon soviel angedeutet: Bestimmte Änderungen dieses Angebots bei gegebenem G[2)] ändern zwar die - vordergründigen - Gleichgewichtsdaten des Wertpapiersystems, nicht jedoch die letztlich interessierenden Gleichgewichtswerte der ungewissen Güterverteilung (hierzu vgl. auch unter b)). Das totale Wertpapiermarktgleichungssystem ist c.p. prinzipiell lösbar nach den Wertpapierkursen A_j, bzw. $\frac{A_j}{N_j}$.[3)]

---

1) Zur Begründung der Vernachlässigung der Herleitung der Optimalbedingungen 2. Ordnung wird auf S.55 , FN1 (vollständiges System) verwiesen.

2) Genau die, die M unverändert lassen, vgl. auch S.78 , FN 3.

3) N_j: Anzahl der Papiere, einen bestimmten Gesamtanspruch γ_j betreffend.

Fall b)

Von eigentlichem Interesse ist die Nachfrage nach ungewissen Gütern, die indirekt in der endgültigen Wertpapierverteilung enthalten ist. Die Güternachfrage ergibt sich direkt durch Optimierung im beschränkten A-D-System. Auch hier wäre das unter a) verwendete Substitutionsverfahren anwendbar, es ist im allgemein formulierten Ansatz jedoch zu wenig übersichtlich, deshalb empfiehlt sich der Lagrangeansatz:

$$L=\sum_s \pi_s u(\xi_o,\xi_{1s}) + \lambda_o(w-\xi_o-\sum_s \phi_s \xi_{1s}) + \sum_{l=1}^{S-J} \lambda_l \sum_{s=1}^{S} m_{ls}\xi_{1s} \quad .^{1)}$$

Als Optimalbedingungen erster Ordnung in den $\xi_o, \xi_{1s}, \lambda_o, \lambda_l$ [2(S+1)-J Unbekannte] erhält man dann

$$(1\text{-}5) \quad \sum_s \pi_s \frac{\partial u}{\partial \xi_o} - \lambda_o = 0 \quad .^{2)}$$

$$(1\text{-}6) \quad \pi_s \frac{\partial u}{\partial \xi_{1s}} - \lambda_o \phi_s + \sum_l \lambda_l m_{ls} = 0 \quad \text{(S+1 Gleichungen)}$$

sowie die Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} (1\text{-}7) \quad & w = \xi_o + \sum_s \phi_s \xi_{1s} \\ (1\text{-}8) \quad & Mx' = \mathcal{O} \end{aligned}\right\} \text{(S-J+1 Gleichungen)} \quad .$$

Es gelten die Abhängigkeiten

$$\xi_{1s} = \xi_{1s}(w;\pi;M;\phi) \quad .$$

Im fiktiven Ansatz lassen sich J fiktive unabhängige Marktgleichungen aggregieren, aus denen sich die Menge der $\{\phi^*_{s'}, s'=1,\ldots,J\}$ bei Vorgabe der Menge $\{\phi^+_{s''} = 0, s''=J+1,\ldots,S\}$ errechnen lassen.
Die Nachfrage nach den übrigen S-J Gütern ist im 'beschränkten' Gleichgewicht dann automatisch gegeben und errechnet sich über den Zusammenhang $Mx' = \mathcal{O}$. Die Gleichgewichtswerte sind

---

1) Dabei sind die m_{ls} die Komponenten der Restriktionsmatrix M.

2) Dies bedeutet nicht: $\frac{\partial u}{\partial \xi_o} = \lambda_o$!

abhängig von den individuellen Präferenzen, den subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen, der Erstausstattung an ungewissen Ansprüchen und der Verteilung dieser, sowie der Beschränkungsmatrix M. Änderungen des Wertpapierangebots beeinflussen c.p. die Gleichgewichtswerte nur, wenn sie M beeinflussen.

Paretooptimalität

Während in einem vollständigen A-D-Marktsystem das gesamtwirtschaftliche Tauschgleichgewicht paretooptimal ist: die individuellen Grenzraten der Substitution in allen Verwendungsarten einander gleich sind - gilt dies im allgemeinen[1] - wie eine unmittelbare Betrachtung der Optimalbedingungen (1-5) bis (1-8) zeigt - im beschränkten System nicht.
Durch eine Veränderung der Restriktionsmatrix ergibt sich eine Erweiterung der Tauschmöglichkeiten (des Zulässigkeitsbereichs) und insoweit die Möglichkeit der Verbesserung der Endsituation für alle, ausgehend von einer bestimmten Erstausstattungsverteilung (vgl. in diesem Zusammenhang auch die Figuren 1 und 2, S. 40). Der Grenzfall der Aufhebung jeglicher Marktrestriktion erscheint allerdings als ein nicht realisierbares Ziel. Der Vergleich 'Vollständiges versus beschränktes Marktsystem' bezüglich der Eigenschaft der Paretooptimalität, wie ihn z.B. Borch[2] unternimmt, kann

---

1) Vgl. auch J. Hirshleifer (1970), S. 268 ff.
Eine Ausnahme ist der Fall des sog. Separationstheorems, der in Teil 2, Abschn. 2.2.3.6 , S. 138 ff. ausführlich behandelt wird. 'Separation' bedeutet im diesem Zusammenhang Unabhängigkeit der Struktur der riskablen Papiere eines Portefeuilles von den Präferenzen und der Vermögensposition des Haushalts, also Existenz eines 'Marktportefeuilles'. Individuell ist hier nur die Aufteilung der Vermögensanlage in sichere und riskable Papiere. Soweit das Separationstheorem gilt, ist im beschränkten System bereits das Paretooptimum des vollständigen Systems realisierbar: Der (beschränkte) Zulässigkeitsbereich beinhaltet in diesem Fall stets die Gleichgewichtssituation des unbeschränkten Systems. "When such a separation property does obtain, achieving a pure exchange Pareto optimum may not require a full complement of Arrow-Debreu securites." (D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 122.) Zur Veranschaulichung vgl. auch Fig. 2, S.40.
2) K.H. Borch (1968), insb. S. 100-107.

aus diesem Grunde bei gegebenem asset-System mißverständlich wirken. So ist auch die diesbezügliche Kritik von Stiglitz[1] zu sehen.

Slutsky-Gleichungen

Die Untersuchung der Beeinflussung der Gleichgewichtswerte infolge von Parameteränderungen - formal erfaßbar mit Hilfe der sog. Slutsky-Gleichungen - ist nicht spezieller Gegenstand der vorliegenden Untersuchung,[2] sondern nur insoweit, als Beeinflussungsmöglichkeiten des Marktgleichgewichts durch c-p-Änderungen des Wertpapierangebots analysiert werden sollen: Es ist die Absicht, diesbezüglich Änderungen herauszustellen, die das güterwirtschaftliche Gleichgewicht nicht beeinflussen.[3]

---

1) J.E. Stiglitz (1972), S. 26: "... it is not particularly meaningfull to compare economies with a full set of Arrow-Debreu markets (which will be Pareto optimal in the conventional sense) with economies lacking such markets."

2) Deshalb sei hier nur auf ausführliche Herleitungen von Slutsky-Gleichungen bei Ungewißheit verwiesen. (Ihre Interpretation ist die gleiche wie in der Standardpreistheorie.) G.O. Bierwag und M.A. Grove (1968) untersuchen den Einfluß von Änderungen des Mittelwerts und der Standardabweichung von Anlageerträgen auf die Nachfrage nach Papieren. Änderungen der Ertragsmatrix unter der Annahme zweier Papiere analysiert A. Sandmo (1969), ebenso J. Ebel (1971), letzterer auch für alternative Anfangsvermögen und n Anlagemöglichkeiten, S. Fischer (1972) behandelt diesbezüglich multiplikative und additive Änderungen der Anlageerträge, sowie die Abnahme der Streuung der Erträge. Die genannten Untersuchungen beschränken sich - mit Ausnahme derjenigen von S. Fischer, der auch den A-D-Ansatz verwendet - auf asset-Systeme ('Portefeuilleanalyse'). Vgl. in diesem Zusammenhang auch S.55 , FN 3.

3) Ganz allgemein behandelt S. Fischer diese Fragestellung - von ihm 'repackaging' genannt, vgl. insb. S. Fischer (1972), S. 383.

2. Die Untersuchung marktkonformer Umverteilungskonzepte im Arrow-Debreu-Modell[1)]

2.1 Einführung und Abgrenzung

2.1.1 Risikoverteilung im Gleichgewicht

Im vorangegangenen Teil wurde die Theorie des Tauschgleichgewichts in einer Welt der Ungewißheit anhand des Arrow-Debreu-Modells für unterschiedliche Marktsysteme entwickelt. Dabei ergab sich: Rational handelnde Haushalte wählen durch Umstrukturierung ihrer zeitpunktbezogenen sicheren und ungewissen Güterbestände im Rahmen der gegebenen Tauschmöglichkeiten eine Zeitfolge ihrer Güterausstattungen, die sie allen anderen möglichen Ausstattungen vorziehen. Damit akzeptieren sie zugleich eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung (individuelle Gleichgewichtsrisikoverteilung).

Die Existenz eines gesamtwirtschaftlichen Gleichgewichts der Risikoverteilung bedeutet dann, daß es einen Vektor von Tauschrelationen gibt, zu dem jedes Wirtschaftssubjekt seine geplante Risikoverteilung realisieren kann. Im Übrigen ist dieses Gleichgewicht abhängig von der Anfangsausstattung der Wirtschaftssubjekte mit Gütern heute und in jedem ungewissen künftigen Zustand innerhalb des Planungshorizonts, von den subjektiven Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeiten des Eintritts der Zustände, ferner von den individuellen Zeit- und Risikopräferenzen und schließlich von der Vollständigkeit bzw. Beschränkung der Tauschmöglichkeiten.[2)]

2.1.2 Risikoverteilung als Einkommensverteilung

Unter der Annahme vorgegebener künftiger ungewisser Produktion ist dieses Konzept geeignet, die Frage der Verteilung

---

1) Bei der Anwendung der Theorie werden des öfteren Wiederholungen von Teilen des Vorangegangenen auftauchen statt bloßer Verweise. Dies schien der bequemere Weg - auch für den Leser.

2) Ausführlich hierzu vgl. Abschn. 1.2.3.1 und 1.2.3.3, insb. S. 75 ff.

bzw. Umverteilung des Produktionsergebnisses - also der Verteilung künftigen Einkommens - bei gegebener Erstausstattung der Haushalte zu untersuchen.
Dies läßt sich folgendermaßen verdeutlichen: Individuelle Ansprüche auf heutige und künftige zeitpunktbezogene Güterausstattungen werden Einkommen im jeweiligen Zeitpunkt genannt. Die Gesamtheit dieser Ansprüche einer Wirtschaftseinheit in einem bestimmten Zeitpunkt heißt individuelles Vermögen. Vermögen läßt sich, soweit seine Komponenten gehandelt werden, zu den jeweils herrschenden Preisen bewerten. Dazu kommen die nicht handelbaren Ansprüche, z.B. aus künftiger Arbeit.[1] Das Vermögen bedeutet für seinen 'passiven' Inhaber (das ist derjenige, der die Anfangsausstattung von vornherein unverändert läßt), eine ganz bestimmte ungewisse Einkommensfolge; für den 'aktiven' Inhaber (das ist jeder, der grundsätzlich mit seiner Anfangsausstattung Handel treibt) beinhaltet Vermögen - soweit handelbar - die Möglichkeiten der Umstrukturierung der Einkommensfolgen durch Tausch.

Die Frage nach der Gleichgewichts-Risikoverteilung ist die Frage nach der Gleichgewichtsverteilung der individuellen Einkommensfolgen bei gegebener Anfangsverteilung der insgesamt vorhandenen Güterausstattungen je Zeitpunkt, also bei vorgegebener Vermögensverteilung. Zur Vermögensverteilung gehören als tauschbare Komponenten: erstens die Ansprüche aus Arbeit aus der laufenden Periode,[2] z.B. Lohnzahlungen für heute geleistete Arbeit (Arbeitseinkommen), zweitens die Ansprüche aus der Bereitstellung von Kapital, soweit eine feste Verzinsung vereinbart wurde (Zinseinkommen) und drittens die Beteiligungen an künftigen Produktionsergebnissen nach Abzug der genannten festen Verbindlichkeiten (Residualeinkommen).

---

1) Vgl. hierzu insb. die Ausführungen über die Nichthandelbarkeit von human capital in den Abschnitten 1.1.6, S. 13 f. und 1.2.2.2, S. 30 ff., sowie die Bemerkungen auf S. 148.

2) Vgl. FN 1).

Bei gegebener Erwartung bezüglich der Entwicklung des technischen Wissens und des Kapitalstocks und bei gegebenem Arbeitsangebot (der Selbständigen und Unselbständigen) und dessen Vollbeschäftigung werden bestimmte ungewisse Folgen von Produktionsergebnissen erwartet. Anfänglich sind diese in Form der genannten Anspruchsarten in bestimmter Weise auf die Haushalte verteilt. Durch Handel kann die Anfangsvermögensverteilung in optimaler Weise umverteilt werden. Das bedeutet, jeder Haushalt wählt im Gleichgewicht zusammen mit der ungewissen Einkommensfolge gerade diejenige Beteiligung am gegebenen Risiko der Produktionsergebnisfolgen, die er im Rahmen seiner Möglichkeiten vorzieht.

2.1.3 Möglichkeiten der Umverteilung

2.1.3.1 Abgrenzung des Begriffs

Unter 'Umverteilung' wird die interpersonelle Übertragung von gegenwärtigem und künftigem Einkommen, also von Vermögensteilen verstanden. Dieser sehr allgemein gehaltene Begriff der Umverteilung schließt die Möglichkeit des Tauschs als zweiseitige Transaktion ein. So gesehen ist jede Gleichgewichtseinkommens- bzw. vermögensverteilung das Ergebnis einer Umverteilung. Sinnvoll ist der Begriff der Umverteilung allerdings gerade erst als Änderung der Gleichgewichtsverteilung zu verstehen. Umverteilung kann ansetzen an den aus den Vorperioden überkommenen und auch die Zukunft betreffenden Ansprüchen (Einkommen aus Kapital) sowie an den Einkommen aus der momentan[1)] zur Verfügung gestellten und zeitlich nicht übertragbaren individuell zugeordneten Arbeitsleistung.

Ein für eine bestimmte Periode schließlich verteiltes Einkommen wird verbraucht oder investiert, ist also seinerseits auch wieder die Grundlage künftiger Vermögensverteilung. Daß heutige Umverteilung das Wachstum des realen Angebots im allgemeinen beeinflussen wird, insbesondere die künftigen Ver-

1) Vgl. in diesem Zusammenhang nochmals S.80, FN 1. Im Folgenden wird vorerst stets von der Nichthandelbarkeit des human capital ausgegangen.

teilungsmöglichkeiten erweitern kann neben der Veränderung der künftigen Anfangsbedingungen, soll nicht Gegenstand dieser Untersuchung sein. (Ausklammerung der Analyse von Vermögenspolitik in Form von Wachstumspolitik). Untersucht werden sollen vielmehr nur solche Umverteilungsvorschläge, die wachstums-, bzw. angebotsneutral sind. Dies ermöglicht auch die Beschränkung auf nur eine Planungsperiode,[1] ein Fall, in dem Einkommens- und Vermögensverteilung identisch sind. Als wachstumsneutral wird eine Umverteilung bezeichnet, die die Investitionen nicht beeinflußt, angebotsneutral bedeutet dasselbe, auf den stationären Fall bezogen. Damit die Möglichkeit der negativen Beeinflussung der Investitionsneigung gegenüber der Vergleichssituation entfällt, darf z.B. die Bereitschaft der Kapitaleigner, Unternehmungsanteile eines bestimmten Gegenwartswertes zu halten durch die Umverteilungsmaßnahmen nicht eingeschränkt werden.[2] Das verlangt einmal, daß den bisherigen Inhabern von riskablen Ansprüchen (sprich Kapitaleigner) eine äquivalente ungewisse Einkommensverteilung garantiert werden muß, zum anderen aber auch, daß der Gegenwartswert künftiger - z.B. bisher sicherer, nun (z. T.) ungewisser - Erträge aus unselbständiger Arbeit unverändert sein muß (Neutralität der Umverteilungsmaßnahmen bezüglich der Beschäftigung). Im Einperiodenfall bedeutet 'angebotsneutrale Umverteilung' also Vollbeschäftigungsannahme[3].

---

1) Siehe auch Abschn. 1.2.2.5, S. 51 f.

2) Wie man weiß, scheitern Versuche der Umverteilung, die dies nicht berücksichtigen, bei Vollbeschäftigungsgarantie daran, daß dann die Möglichkeit der Überwälzung dieser weiterhin als Kostenbestandteil betrachteten Entlohnungsalternativen in den Preisen wahrgenommen wird; ohne Vollbeschäftigungsgarantie droht Beschäftigungsrückgang. Vgl. z.B. Gutachten des Sachverständigenrates zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung 1972/73, Ziff. 501 f.

   Zwecks umfassender Information, auch über die wichtigsten Beiträge in der Bundesrepublik zu dem Komplex 'Vermögensbildung bzw. -umverteilung' sei exemplarisch auf W.J. Mückl (1973) verwiesen. Mückls Arbeit untersucht insbesondere die zahlreichen Vorschläge aus der wirtschaftspolitischen Realität der Bundesrepublik auf diesem Gebiet. Darauf weiter einzugehen, ist hier nicht beabsichtigt. Vgl. auch Abschn. 2.1.5, S. 90 f.

3) Zwecks Berücksichtigung des mittelfristigen Aspekts im Rahmen einer Modellkonstruktion (Abschn. 2.2.1, S. 92 ff.).

Weiterhin ist zu überlegen, welches die Rolle des Faktors Kapital im Zusammenhang mit Umverteilungsüberlegungen ist. Kapital im Sinne von"Kapitalgütern"erlaubt die 'Konservierung' von Produktionsmöglichkeiten für die Unternehmungen und ist gleichzeitig für die Haushalte eine Form der'zeitlichen Übertragung' von Ansprüchen mit den Konsequenzen, daß die Produktionsmöglichkeiten das Ergebnis der Kombination von Arbeit und Kapital sind und daß die Anfangsausstattungen der Haushalte mehr enthalten können als den Gegenwert ihres laufenden Arbeitsangebots. Der Bedeutung dieser Eigenschaften des Faktors Kapital wird im Rahmen der Fragestellung durch die folgenden Annahmen ausreichend Rechnung getragen:

- Es gibt eine feste Anzahl von Unternehmungen, die mit einem vorgegebenem Bestand an Kapitalgütern und mit einem bestimmten Arbeitseinsatz eine bestimmte mengenmäßige Produktionsergebnisverteilung in einer Periode erzielen können.
- Die Anrechte auf das laufende Produktionsergebnis der Unternehmungen nach Abzug der jeweils eingegangenen Verpflichtungen aus dem Einsatz des nichtlagerfähigen Faktors Arbeit sind bereits auf die Haushalte verteilt durch Anteile, die in der Vergangenheit 'irgendwie' festgelegt wurden.

Damit ist einerseits der Einfluß des Kapitalstocks auf die Höhe des zu verteilenden Ergebnisses berücksichtigt, andererseits sein Einfluß auf die interpersonelle Einkommensverteilung als Anfangsvermögensverteilung erfaßt.
Auf die Unterscheidung der Einkommensansprüche aus Kapitaleigentum in Form festverzinslicher Forderungen und in Form von Anteilspapieren kann verzichtet werden: So weit die Existenz eines Marktes für sichere künftige Einkommen die Verteilung der Einkommen insgesamt tangiert, so läßt sich dies bereits ausreichend im Zusammenhang mit der Gestaltung der Arbeitsverträge behandeln, die als Analogie zu festverzinslichen Vermögenswerten darstellbar sind.[1)]

---

1) So verfährt auch P.A. Diamond (1967), vgl. insb. S. 766: " For convenience let us define one unit of bonds as a promise to pay r units of consumption where r is the factor wage. Then, an individual receives fixed payments for both the input he owns and the bond he holds. Let b_i be the sum of these two elements."

Deshalb ist es ausreichend, wenn hier Kapitaleinkommen ausschließlich in Form von Einkommen aus Beteiligungen berücksichtigt wird.

Nach diesen Überlegungen reduziert sich das Problem der Umverteilung auf die Untersuchung der Verteilungsmöglichkeiten ungewisser Einkommen für eine Periode bei vorgegebener Anfangsausstattung der Haushalte mit Arbeit und mit Anteilen an den bestehenden Unternehmungen.[1] Handelsobjekte sind ausschließlich[2] Arbeit, sichere Einkommensansprüche und Beteiligungen an den riskablen Residualeinkommen der Unternehmungen (asset-Ansatz).[3]
Da nur für eine Periode geplant wird, ist der Handel mit diesen Ansprüchen identisch mit dem Handel an Anteilspapieren (Aktien).
Dies ist der generelle Rahmen, von dem im Folgenden stets Gebrauch gemacht wird. Die Frage, inwieweit verschiedene Einkommensverteilungen im Gleichgewicht möglich sind und in diesem Sinne Umverteilung denkbar ist, ist die Frage danach, ob und wodurch sich unter den gerade diskutierten Grundannahmen eine Gleichgewichtsverteilung verändern läßt.[4]

2.1.3.2 Umverteilung durch Beeinflussung der subjektiven Parameter

Die Änderung eines Gleichgewichtszustandes kann durch Variation der subjektiven Parameter, die das Gleichgewicht charakterisieren, erreicht werden.[5] Im einzelnen bedeutet dies eine Einflußnahme auf die individuellen Anfangsvermögen,

---

1) Ausführlich hierzu im Rahmen der Darstellung des Grundmodells in Abschn. 2.2.1, S. 92 ff.

2) Der Einfachheit halber wird davon ausgegangen, daß die Produktionsfaktoren heute nicht konsumiert, sondern nur zu Produktionszwecken verwendet werden können, und zwar für ein 'Standardkonsumgut morgen'.

3) Zum Begriff sowie zur Äquivalenz dieser Darstellungsform mit dem A-D-Modell, vgl. Abschn. 1.2.3.3, S. 67 ff.

4) Daß Ungleichgewichtszustände unterschiedliche Einkommensverteilungen bedeuten, steht außer Frage.

5) Anwendungsfall der komparativen Statik.

Wahrscheinlichkeitsvorstellungen und Präferenzen.[1] Durch Beeinflussung des individuellen Risikoverhaltens oder durch eine nicht über den Markt vorgenommene (sprich freiwillige), sondern z.B. im Wege der Intervention erzwungene interpersonelle Umverteilung vorgegebener Bestände an übertragbaren Ansprüchen kann die Einkommensverteilung geändert werden. Diese Form der Einkommensumverteilung soll hier nicht untersucht werden. Gegenstand der Untersuchung ist vielmehr die

2.1.3.3 Umverteilung durch Beeinflussung des Titelangebots,

also der 'Marktparameter'. Unter (Titel-)Angebotsvariation wird einmal die Einführung neuer Titel, zum anderen die Umstrukturierung des gegebenen Titelangebots bei konstantem Realangebot verstanden. So kann z.B. versucht werden, durch das Angebot anderer als sicherer Arbeitsverträge für die unselbständig Beschäftigten die Einkommensverteilung zu deren Gunsten zu beeinflussen. Die Beurteilung von Umverteilungsversuchen über (Grundmuster von) Entlohnungsformen ist der eigentliche Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Ausprägungen solcher Versuche in der Realität sind der Beteiligungslohn, der Investivlohn, sowie der etwas kompliziertere Vorschlag des Sachverständigenrats aus dem Jahre 1972.[2]

2.1.3.4 Entlohnungsform und Verteilung

Umverteilung durch Wahl der Entlohnungsform heißt in diesem Zusammenhang, durch geeignete Ausgestaltung der Form des Entgelts von Arbeitsleistung die Gleichgewichtsrisikoverteilung zugunsten bestimmter Haushalte (z.B. der unselbständig Beschäftigten) zu verändern. Nun ist aber für die Gleichgewichtsrisikoverteilung die Verteilung der Anfangsausstattungen (Vermögensverteilung) wichtig und die Entlohnungsform nur insoweit von Bedeutung, als sie über das Vermögen auf die künftigen ungewissen Anfangsausstattungen Einfluß hat.

---

1) Vgl. Abschn. 1.2.3, S. 55, sowie Abschn. 1.2.3.3, S. 76.

2) Vgl. SR-Gutachten 1972/73, Ziff. 501 ff., im übrigen W.J. Mückl (1973).

Es wird von zwei Entlohnungsformen ausgegangen, einer mit sicherer Auszahlung (kontraktbestimmtes Einkommen) und einer mit ungewisser Auszahlung (Residualeinkommen). Grob gesprochen ist die erste Entlohnungsform in der Regel für unselbständige Arbeit vorgesehen, die zweite als Entgelt für Unternehmertätigkeit. Es muß jedoch Unternehmertätigkeit nicht in ungewisser Form als Beteiligung entlohnt werden. Desgleichen braucht andere Arbeitsleistung nicht notwendigerweise sicher entgolten zu werden.[1] Die Erkenntnis, daß Management und Risikobereitschaft nicht zwingend komplementär in dem Sinne sind, daß der Unternehmerlohn stets eine Risikoprämie enthält,[2] spiegelt sich in der unterschiedlichen rechtlichen Ausgestaltung diesbezüglicher Verträge wider. Andererseits wird den Anbietern beliebiger anderer Arbeit auch Beteiligungsentlohnung angeboten (z.B. Erfolgsprämien). Letzten Endes sind die Entlohnungsformen willkürlich wählbar mit der einzigen Einschränkung, daß die Summe der Entlohnungen stets dem gesamten Produktionsergebnis entsprechen muß (asset-Ansatz).[3] Bei Ungewißheit muß also stets ein bestimmter Anteil der Einkommen in riskablen Ansprüchen bestehen, und zwar als Residual zwischen der Summe der sicheren Entlohnungen und dem Gesamtergebnis. Wer diese Residualtitel (Aktien) schließlich hält, ist nicht bereits mit dem Ergebnis der Entlohnungsverteilung festgelegt, obwohl es durch diese mitbestimmt wird. Letztlich entscheidend ist die Entlohnungsverwendung: Die entsprechend den Arbeitsverträgen auf die Haushalte verteilten sicheren und riskablen Ansprüche gehören zu den oben genannten Anfangsausstattungen, durch deren Tausch sich die Haushalte schließlich ihre optimale Risikobeteiligung als Gleichgewichtseinkommensverteilung beschaffen können. Erst dann ist bestimmt, wer Unternehmer (sprich Träger von Risiko) und wer Unselbständiger (im Sinne von Empfänger sicheren Einkommens)

---

1) Vgl. hierzu auch die Ausführungen des Sachverständigenrats (Gutachten 1972/73), Ziff. 504 f.

2) Diese Idee findet sich schon in E. Fels und R. Richter (1957), S. 218: "Inasmuch as risk-bearing has often been considered to be the entrepreneur's real burden, let us stop to realize that, in modern times, this is exactly what the entrepreneur is likely to delegate first of all, if he is wise - by buying all sorts of insurance." Vgl. hierzu insbes. die Überlegungen zur sogenannten 'Residualungewißheit' in Abschn. 1.2.2.2, S. 28; zwecks allgemeinem Verweis bezüglich des asset-Ansatzes siehe S.84,FN3.

ist. Dabei dürfte regelmäßig nur eine funktionelle, in den seltensten Fällen eine personelle Einteilung nach diesen Merkmalen auftreten. Das Ergebnis - um es zu wiederholen - wird von der gewählten Entlohnungsform nur insoweit beeinflußt, als durch diese die individuellen Anfangsausstattungen geändert werden. Gerade dieser Zusammenhang ist aber - wie zu zeigen sein wird - nicht allgemein gegeben. Unter bestimmten Annahmen ist die gesamtwirtschaftliche Gleichgewichtsrisikoverteilung unabhängig von der Aufspaltung der Entlohnungsmöglichkeiten, was gleichbedeutend mit dem Scheitern einer Umverteilungspolitik durch Titelangebotsvariation ist.

Dies läßt sich extrem auch wie folgt interpretieren:
Jeder Anbieter von Arbeit kann nur in einer Unternehmung beschäftigt sein. Dort wird er entsprechend seiner Leistung durch Beteiligung an dem ungewissen Produktionsergebnis entlohnt (reine Beteiligungsentlohnung). Die Unternehmungen unterscheiden sich durch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen ihres Produktionsergebnisses. Durch Tausch ihrer Lohn- = Produktionsanteile mit bestimmtem Risiko können dann die Haushalte prinzipiell ihre Situation verbessern (vgl. Analogie zur Realentlohnung im Mehrgüterfall bei Sicherheit). Daneben soll es einen Markt für sichere Ansprüche geben, auf dem die Anbieter ihre gegebene Risikosituation dadurch riskabler machen, daß sie sichere Titel aus ihrem riskablen Bestand abspalten (z.B. wieder durch Zahlung fixierter Lohneinkommen) und auf dem sich die Nachfrager umgekehrt versichern, indem sie riskable Ansprüche gegen sichere eintauschen. Dabei ist zu beachten: In einem sogenannten vollständigen Marktsystem[1] eröffnet der sichere Markt nicht not-

---

1) Ein solches ist dadurch charakterisiert, daß die Anzahl der Märkte, auf denen verschieden riskable Titel gehandelt werden, zugleich die Anzahl der maximal möglichen alternativen Zustände S je Unternehmungsergebnis ist. Ist die Anzahl der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Produktionsergebnisse (sprich Unternehmungen) größer als S, so wurde gezeigt, daß sich alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus S linear unabhängigen Titeln, die in diesem Fall existieren, kombinieren lassen, also keine eigenen Märkte ergeben. Vgl. Teil 1, Abschn. 1.2.2.2, S. 23 ff.

gegebenenfalls zusätzliche Tauschmöglichkeiten für Risiko. Die optimale Risikoverteilung kann bereits auf den übrigen Märkten realisierbar sein. In einem beschränkten Marktsystem dagegen erweitert der Markt für sichere Titel stets den Zulässigkeitsbereich[1] und bringt damit prinzipiell die Möglichkeit der Verbesserung für alle (paretoinferiore Situation). Diese letzte Überlegung ist zu verallgemeinern: Die Wirkung von Umverteilungsmaßnahmen durch Titelangebotsvariation ist abhängig von dem angenommenen Marktsystem.

2.1.4 Umverteilung und Marktsysteme

2.1.4.1 Vollständiges Marktsystem[2]

Es erscheint unmittelbar einleuchtend, daß in einem vollständigen Marktsystem ceteris paribus weder durch die Einführung neuer Titel (seien sie nun sicher oder riskabel) noch durch Umstrukturierung des Angebots auf den vorhandenen Titelmärkten die Gleichgewichtseinkommensverteilung verändert werden kann. Denn die Gleichgewichtssituation ist im vollständigen System ja gerade dadurch ausgezeichnet (paretooptimaler Zustand), daß sich keiner der Beteiligten mehr verbessern kann, ohne daß sich die Situation anderer verschlechtert.[3] Es sei denn, es werde der Möglichkeitsbereich einzelner oder aller geändert, was aber im vollständigen Marktsystem allein durch Änderung der Titel bzw. ihrer Zusammensetzung ex definitione nicht möglich ist. Daß im vollständigen System der Versuch, die Haushalte durch Variation des Titelangebots neu am vorgegebenen Produktionsrisiko zu beteiligen mit dem Ziel, die Wohlfahrt zu erhöhen, wieder bei der ursprünglichen Einkommensverteilung enden wird, zeigt - ohne exakte Darstellung - schon folgende Überlegung:

---

1) Vgl. Abschn. 1.2.2.3, S. 36, sowie Abschn. 1.2.3.3, S. 70 f.

2) Zwecks Charakterisierung und Verweis vgl. S. 87, FN 1.

3) Hierzu sei nochmals K.J. Arrow (1974b), S. 255 zitiert: "An allocation of resources is Pareto efficient (or Pareto optimal) if there is no other feasible allocation which will make everyone better off (or, as more usually stated, make everyone at least as well off and at least one member better off)."

Allen Beteiligten soll die neue Aufteilung der vorgegebenen Produktion(-sfolge) mit bestimmtem Risiko mindestens genau so vorteilhaft erscheinen wie die bisherige Situation. Die Entscheidungstheorie für den Ungewißheitsfall lehrt zwar, daß es wohl subjektive Indifferenz zwischen verschieden riskablen Einkommen gibt, d.h. für unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen eines zahlenmäßigen Ergebnisses (sprich Einkommen) die Möglichkeit der subjektiven Gleichbeurteilung besteht. So wird z.B. ein niedriger Erwartungswert durch eine entsprechend niedrige Streuung des ungewissen Ergebnisses ausgeglichen und umgekehrt.[1] Es erscheint also grundsätzlich möglich, daß Bezieher relativ riskabler Einkommen, etwa die Anteilseigner diese zugunsten gleichwertiger sicherer Einkommen aufgeben und daß die Arbeitnehmer als Prototyp sicherer Einkommensbezieher gerade diese Abgabe des Risikos übernehmen bei gegebenem Gesamtrisiko der Wirtschaft und sich dadurch eventuell besserstellen. Dieser Schluß ist zwar möglich für beliebige Ausgangsverteilungen, jedoch unzulässig, wenn bisher eine gesamtwirtschaftliche Gleichgewichtssituation angenommen wurde. Denn eine solche ist gerade dadurch gekennzeichnet, daß - wie gezeigt[2] - schon ein subjektiver Auswahlprozess stattgefunden hat, dessen Ergebnis paretooptimal ist. So gesehen kann im vollständigen System also jede Umverteilung nur mit Nachteilen für mindestens einen der Beteiligten enden, sie wird deshalb auch nicht über den Markt erreichbar sein. Der Marktmechanismus wird hier über die zu untersuchenden Maßnahmen keine Umverteilung bewirken.

2.1.4.2 Beschränktes Marktsystem[3]

Das kann anders sein im beschränkten Marktsystem. Umvertei-

---

1) Vgl. auch Abschn. 1.1.5, insb. S. 9, vgl. hierzu auch die ausführlichen mikrotheoretischen Überlegungen von H. Tomann (1975), S. 13 ff.

2) Abschn. 1.2.3.1

3) Grundsätzliches hierzu siehe Abschn. 1.2.2.2, S. 25 ff.

lungsvorschläge, die sich auf eine Änderung des Titelangebots beschränken analog zur Änderung der Finanzierungsstruktur eines gegebenen realen Projekts, sind hier - zumindest nicht von vornherein - zur Unwirksamkeit verurteilt, und zwar deshalb nicht, weil die Titelangebotsvariation eine Änderung des ungewissen Möglichkeitsbereichs[1] bewirken kann. Die Einschränkung -'zumindest nicht von vornherein'- soll andeuten: Auch im beschränkten System ergibt nicht jede Konstruktion neuer Tauschobjekte tatsächlich andere individuelle Möglichkeitsbereiche. Dies ist letztlich - um es hier schon anzudeuten - immer mit Arbitragezusammenhängen zu erklären. Einmal muß auch im beschränkten Marktsystem eine Konstruktion von neuen Titeln erfolglos sein, die nichts anderes darstellt als eine Mischung bereits existierender Ansprüche, sofern gezeigt werden kann, daß eine bloße Änderung des 'Mischungsverhältnisses' der assets auch im beschränkten System ohne Einfluß auf das Gleichgewicht ist. Zum anderen lassen sich auch bei Einführung bisher nicht angebotener Titel Bedingungen angeben, unter denen eine solche Umverteilungspolitik erfolglos sein wird in dem Sinn, daß das ursprüngliche Verteilungsgleichgewicht unverändert bleibt. Dieses Ergebnis tritt ein, wenn sich die Marktpreise derart anpassen, daß die individuellen künftigen Ausgangsausstattungen je Zustand in ihrer ursprünglichen Verteilung verharren.[2]

2.1.5 Gliederung der Untersuchung

Die Fragestellung nach der Wirksamkeit 'am Markt ansetzender' produktionsneutraler Umverteilungsvorschläge reduziert sich nach den bisherigen Überlegungen auf folgenden Kern: Inwieweit kann überhaupt durch die Wahl der Struktur des Titelangebots eine vorgegebene ungewisse Produktion unterschiedlich auf die Nachfrager verteilt werden? Der hier vorgenommene Versuch der Beantwortung dieser Frage ist grundsätzlicher Natur und wertneutral, d.h. Überlegungen, die im Folgenden

---

1) Vgl. zum Verweis auf die allgemeine Darstellung S. 88, FN 1.

2) Diese Möglichkeit ist in den Abschnitten 2.2.3.4 ff. behandelt.

aufgezeigten Ergebnisse zugunsten der einen oder anderen Gruppe zu verwerten, sind beliebig möglich, seien hier aber - wie schon oben erwähnt - ausgeschlossen.
Im Rahmen eines einfachen Arrow-Debreu-Modells werden nun folgende Punkte im einzelnen behandelt:

- die Wirkungslosigkeit der Umverteilung[1] durch jegliche Veränderung der Struktur eines vollständigen Marktsystems. Eine ausführliche Herleitung des schon oben plausibel gemachten Ergebnisses scheint notwendig, nicht zuletzt wegen der Schaffung eines Referenzsystems für die weiteren Überlegungen,
- die Umverteilungsmöglichkeiten über die Veränderung der Märkte im beschränkten System, und zwar einmal als Änderung der Struktur der vorhandenen Titel[2], zum anderen als Änderung des Titelangebots durch Einführung bisher nicht (auch nicht indirekt) vorhandener Märkte.

Beide Hauptgliederungspunkte umfassen die Frage nach der Möglichkeit der Umverteilung durch traditionelle Beteiligungsentlohnung, während sich Umverteilungskonzepte, die neue Titel propagieren - wie z.B. der SR-Vorschlag (1972/73) - sinnvoll nur im beschränkten System analysieren lassen. Im letzteren Fall ist allerdings stets an erster Stelle zu überprüfen, ob überhaupt eine Erweiterung der Möglichkeiten des Marktes vorliegt.

---

1) Im hier behandelten speziellen Sinn.

2) Es wird sich zeigen, daß dieses Problem analog ist zur Frage nach der Gültigkeit des Modigliani-Miller-Theorems - die Wahl der optimalen Finanzierungsstruktur betreffend - in einem beschränkten System für ungewisse Ansprüche. Zum M-M-Theorem vgl. Abschn.2.2.2.4 , S. 116 , FN 1.

2.2 Theorie der Umverteilung durch Titelangebotsvariation in einem Grundmodell der Risikobeteiligung

2.2.1 Modellannahmen

2.2.1.1 Das Modell

Das hier verwendete Grundmodell der Risikoverteilung (im Folgenden kurz 'Grundmodell' genannt), in dem die Umverteilungswirkung alternativer Entlohnungsformen untersucht werden soll, sieht wie folgt aus:

Betrachtet wird eine Wirtschaft aus I Haushalten als Verbrauchseinheiten und J Unternehmungen als Produktionseinheiten.
Die Wirtschaftssubjekte haben einen Planungshorizont von einer Periode: Im Zeitpunkt $t = 0$ werden die Verbrauchs- und Produktionspläne aufgestellt, alle Verträge abgeschlossen und die Produktionsfaktoren eingesetzt. Im übrigen werden die Pläne und Vertragsabschlüsse (Produktionsergebnis, Verteilung und Verbrauch) im Zeitpunkt $t = 1$ realisiert.[1)]

Für den Bereich der Produktion gilt:

Es wird ein Gut ('Sozialprodukt') durch den Einsatz von Arbeit bei vorgegebenem Kapitalstock und vorgegebener Produktionsfunktion produziert. Dabei werden die in $t = 0$ kontrahierten Mengen eingesetzt. An welchem Ziel die Unternehmungen ihren Arbeitseinsatz orientieren, wird hier nicht untersucht.[2)] Für unsere Zwecke reicht es aus, anzunehmen, daß die Planung des Arbeitseinsatzes vorgegeben ist, daß insgesamt die Arbeitsnachfrage $(\Sigma \bar{q}_j)$ gleich dem Arbeitsangebot $(\Sigma \bar{q}_i)$ ist[3)] und damit insbesondere auch die Verteilung des Vollbeschäftigungsangebots auf die Unternehmungen bestimmt ist.

---

1) Eine Zeitindexierung erübrigt sich, da die unterschiedlichen Größen jeweils nur in einem der beiden Zeitpunkte auftreten.

2) Vgl. hierzu die Überlegungen in der Einleitung.

3) Zur Begründung vgl. S. 82 , FN 3 .

Das Produktionsergebnis ist ungewiß infolge ungewisser Produktionsbedingungen.[1] Dies läßt sich mit Hilfe des A-D-Ansatzes wie folgt darstellen: Im Zeitpunkt $t = 1$ existieren S verschiedene einander ausschließende Zustände. Jedem Zustand s, $s=1,\ldots,S$ ist eine bestimmte Wahrscheinlichkeit π_s zugeordnet. Diese Wahrscheinlichkeiten existieren in den Vorstellungen der I Haushalte und können demzufolge differieren (subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilungen):

$$\pi_i = (\pi_{i1},\ldots,\pi_{iS}) \qquad i = 1,\ldots,I$$

mit $\sum_s \pi_{is} = 1$, $\pi_{is} \geq 0$ für alle s.

Die ungewissen Zustände sind dadurch gekennzeichnet, daß das Produktionsergebnis der Unternehmung j bei gegebenem Arbeitseinsatz maximal S Ausprägungen haben kann. Für mindestens eine der J Unternehmungen nimmt das Produktionsergebnis genau S unterschiedliche Ausprägungen an. Formal ist dies darstellbar durch den Outputvektor der Unternehmung j:

$$x_j = x_j(\bar{q}_j) = (\xi_{j1}(\bar{q}_j),\ldots,\xi_{jS}(\bar{q}_j)) \qquad \begin{matrix} j = 1,\ldots,J \\ s = 1,\ldots,S \end{matrix}$$

$$\equiv (\bar{\xi}_{j1},\ldots,\bar{\xi}_{jS}) = \bar{x}_j$$

und als Risikoverteilung

$$\omega_{ij} = (\bar{x}_j;\pi_i) \quad .$$

---

1) Bei Annahme einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion $x = K^{1-\alpha}L^{\alpha}$ kann dies z.B. bedeuten, daß der Exponent α nicht mit Sicherheit bekannt ist (K: Kapitalstock, L: Arbeitseinsatz). Im Wachstumsfall kann neben technologischer Ungewißheit solche infolge unverhergesehener Entwicklung des Kapitalstocks auftreten. Die Ungewißheit bezüglich der Güternachfrage mit dem dazugehörigen Gewinn- und Beschäftigungsrisiko ist hier insoweit mitbehandelt als sie als Transaktionsungewißheit im Einperiodenfall interpretierbar ist. Vgl. hierzu Abschn. 1.1.6, S. 13 ff.

Dabei bezeichnet $\bar{q}_j$ die von der Unternehmung j im Zeitpunkt $t = 0$ nachgefragte und auch eingesetzte Arbeitsmenge, gemessen in heutigen Arbeitsstunden. $\xi_{js}(\bar{q}_j)$ ist das zu $\bar{q}_j$ gehörende,[1] vom in $t = 1$ herrschenden Zustand s abhängige ungewisse Produktionsergebnis der Unternehmung j, gemessen in morgigen Gütereinheiten. Die spezielle Form der Produktionsfunktion kann offen bleiben, da nur ein Arbeitseinsatz betrachtet wird. Im Gegensatz zu den subjektiv gegebenen Wahrscheinlichkeiten seien die Outputvektoren und die Zahl der Zustände objektiv bekannt.

Die zustandsabhängigen Ausbringungsmengen der J Unternehmungen sollen sich unterscheiden, und zwar dergestalt, daß gilt:

Für keine Unternehmung k, $k=1,\ldots,J$, gibt es einen Vektor $l_k = (\lambda_{k1},\ldots,\lambda_{kJ})$ derart, daß sich

$$x_k = \sum_j \lambda_{kj} x_j \quad , \qquad j = 1,\ldots,J \quad , \quad j \neq k$$

bilden läßt.

Das bedeutet, daß die Ergebnisvektoren verschiedener Unternehmungen linear voneinander unabhängig sind. Jede Unternehmung bildet damit auch ihre eigene Risikoklasse. Die Unternehmung j ist also durch ihren Outputvektor eineindeutig charakterisiert.[2] Dem entspricht die Annahme der Produktion von S Gütern in J Unternehmungen mit $J \leq S$.[3]

---

1) Das konstante Argument $\bar{q}_j$ wird im Folgenden vernachlässigt, ebenso die Kennzeichnung der vorgegebenen Outputvektoren mittels Querbalken.

2) Dieser Schluß ist im allgemeinen nicht zulässig. Innerhalb einer Risikoklasse gilt: Alle Ergebnisvektoren der zugehörigen Unternehmungen $k=1,\ldots,K$ lassen sich durch Multiplikation mit einem Skalar λ aus dem Ergebnisvektor einer beliebig herausgegriffenen Unternehmung j' dieser Risikoklasse erzeugen.
Formal: $x_k = \lambda_{kj'} x_{j'} \quad , \quad j' \underset{k=1,\ldots,K}{\in} \{1,\ldots,S\}$

3) S als Zahl der linear unabhängigen Handelsobjekte (S-1 Aktien und 1 Bond) kennzeichnet das vollständige System. $J<S-1$ gilt für das beschränkte System ungewisser Ansprüche. Vgl. Abschn. 1.2.2.2, S. 23 ff. Beachte: Unter den Annahmen des Grundmodells ist nun S die Dimension des Güterraums (allgemein: $\mathbb{R}^K$). Der Gegenwartskonsum wird im Grundmodell vernachlässigt.

Das gesamtwirtschaftliche Angebot von Gut s beträgt

$$\xi_s = \sum_j \xi_{js} \quad .$$

Insgesamt ergibt sich für die ungewisse[1] Produktion der Wirtschaft bei Vollbeschäftigung und bei gegebener Aufteilung des gesamten Arbeitsangebots auf die J Unternehmungen der gesamtwirtschaftliche Outputvektor

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_S) = \sum_j x_j$$

und die gesamtwirtschaftliche Risikoverteilung

$$\Omega_i = (x; \pi_i) \quad .$$

Die Annahme von J Unternehmungen = J unterschiedliche Risikoklassen = J linear unabhängige Outputvektoren wird damit begründet, daß einmal im Rahmen der Argumentation J linear unabhängige Gewinnanteile als Handelsobjekte eingeführt werden sollen,[2] deren Anzahl prinzipiell so groß sein kann wie die Anzahl der möglichen Zustände. (Dadurch wird die Untersuchung des vollständigen Systems ermöglicht.) Zum anderen können im verwendeten Grundmodell Umverteilungsvorschläge diskutiert werden, die auf dem Unterschied zwischen den Risikoverteilungen der einzelnen Unternehmungen und der Verteilung der gesamten Produktion aufbauen.

Die Annahme von J Risikoklassen ist im vorliegenden Eingutfall auch statthaft: Selbst, wenn alle Wirtschaftssubjekte offenen Zugang zum vorhandenen technischen Wissen haben, können unterschiedliche Verteilungen des Produktionsergebnisses bei gleichem Arbeitseinsatz existieren und damit unterschiedliche Arbeitseinsatzplanmengen. Man stelle sich am zweckmäßigsten unterschiedliche Standorte der Unternehmungen vor, aber auch unterschiedliche Kapitalausstattungen könnten als Ursache in Frage kommen. Es kann

---

1) Vgl. Abschn. 1.2.3.1, S. 54.

2) Zur Begründung, weshalb der Handel mit 'Aktien' dem zwar äquivalenten Handel mit Elementaransprüchen als 'machbarer' vorgezogen wird, sei nochmals auf Abschn. 1.2.2.2, S. 26 ff. verwiesen.

also nicht jeder die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung 'produzieren'. Diese Interpretation ist unabhängig von Annahmen bezüglich des Informationsgrades der Wirtschaftssubjekte, auch widerspricht sie nicht der Annahme der vollständigen Konkurrenz auf den Märkten.

Die Unternehmungen entlohnen die Eigner des Faktors Arbeit zunächst ausschließlich mit einem einheitlichen in $t = 0$ vereinbarten und in $t = 1$ zu entrichtenden Lohnsatz r, der gemäß der Annahme der Vollbeschäftigung der Gleichgewichtsreallohn sein muß. Durch diese Annahme soll mit dem Grundmodell das Bezugssystem geschaffen werden für die Untersuchung der Auswirkung modifizierter Entlohnungsformen, dem eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Der Anbieter einer Arbeitsstunde erhält r Stück eines Titels ('Bond'), der folgenden Anspruchsinhalt hat: 'eine Gütereinheit lieferbar in $t = 1$, unabhängig vom dann herrschenden Zustand'. Die von der Unternehmung j insgesamt zu leistenden Lohnzahlungen betragen damit $r\bar{q}_j$ sichere Gütereinheiten morgen. Zur Verteilung an die Inhaber der Unternehmung j verbleiben dann je nach Zustand die Gütermengen

$$\gamma_{js} = (\xi_{js} - r\bar{q}_j) \quad .$$

Der Gewinnvektor der Unternehmung j lautet

$$\gamma_j = (\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jS}) \quad .$$

Für den Bereich der Haushalte gilt:

Die Haushalte maximieren den Erwartungswert ihres Nutzens $Eu_i(x_i)$ aus dem morgigen ungewissen Einkommen x_i durch Tausch. Im Ergebnis wird der optimale Verbrauchsvektor x_i^* aus der Menge aller möglichen x_i gewählt.
Dabei wird von den oben bereits erwähnten subjektiven Wahrscheinlichkeitsvorstellungen π_i, die S Zustände der Wirtschaft betreffend, ausgegangen, sowie von individuellen kardinalen Nutzenfunktionen $u_i(x_{is})$, die Risiko-

aversion beinhalten, im übrigen überall stetig und zweimal differenzierbar sind.[1)]

Der Möglichkeitsbereich x_i des Haushalts i wird bestimmt durch den gegebenen individuellen Anfangsbestand an Güteransprüchen, durch die Anzahl und den Inhalt der generellen Tauschobjekte (Märkte).[2)] Zur Erstausstattung des Haushalts gehört der einheitliche Faktor Arbeit, gemessen in Arbeitsstunden und die vorgegebenen Anteile an den ungewissen Gewinnen aller Unternehmungen.

Der Haushalt i bietet zum Gleichgewichtsreallohn eine feste Menge $\bar{q}_i$ des Faktors Arbeit an,[3)] die er auch absetzen kann (Annahme der Vollbeschäftigung).

Für die Beteiligung der Haushalte an den Gewinnen gilt der folgende Schlüssel

$$0 \leq \alpha_{ij} \leq 1 \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,I \\ j = 1,\ldots,J \end{matrix}$$

$$\text{mit} \quad \sum_j \bar{\alpha}_{ij} = 1 \quad , \qquad \text{für alle } j.$$

$\bar{\alpha}_{ij}$ bezeichnet die Erstausstattung des Haushalts i mit Anteilen der Unternehmung j. Damit steht ihm anfänglich im Zustand s der Gewinn $\bar{\alpha}_{ij}\gamma_{js}$ zu.

Der Gegenwartswert der Erstausstattung beträgt

$$w_i = \bar{q}_i + \sum_j \bar{\alpha}_{ij} A_j \quad ,^{4)}$$

mit A_j als Gegenwartswert des Gewinns der Unternehmung j (vgl. hierzu den nachfolgenden Absatz 'Tauschmöglichkeiten').

w_i ist zugleich der Gegenwartswert des individuellen Möglichkeitsbereichs[5)]

$$w_i = q_i + \sum \alpha_{ij} A_j .$$

---

1) Im einzelnen vgl. hierzu die Abschn. 1.2.2.4, S. 41 ff. und 1.2.3, S. 53 ff.

2) Allgemein zum Inhalt der hier angesprochenen Begriffe 'Budgetrestriktion und Zulässigkeitsbereich', vgl. Abschn. 1.2.2.3, S. 35 ff.

3) Darunter fällt auch das Arbeitsangebot der Selbständigen. Soweit die Umverteilung (allgemein die Form der Entlohnung) als ohne Einfluß auf die Verteilung des riskablen Produktionsergebnisses erkannt wird, ist auch das Arbeitsangebot unverändert.

4) Handelbares Vermögen

5) Vgl. FN 2

Die mit w_i für Haushalt i im Zustand s morgen mögliche Ausstattung mit Gütereinheiten ist

$$\xi_{is} = rq_i + \sum_j \alpha_{ij}\gamma_{js}$$

mit $$q_i = w_i - \sum_j \alpha_{ij}A_j \quad .^{1)}$$

Für die Tauschmöglichkeiten[2)] gilt:

Es gibt folgende vollkommene asset-Märkte:

- der Markt für sichere Titel (Bondsmarkt) und
- die Märkte für normierte Anteile an den Residualgewinnen der Unternehmungen (J Aktienmärkte).

Auf dem Markt für sichere Titel wird die Einheit

$$a = (1,\ldots,1)$$

'1 Bond' genannt, gehandelt. Unabhängig davon, welcher Zustand morgen eintritt, erhält der Inhaber von y Einheiten des Titels a y Gütereinheiten. Der Preis p_a beträgt $\frac{1}{r}$ Arbeitsstunden je sichere Gütereinheit morgen (je Bond).

$\frac{1}{p_a}$ ist interpretierbar als Reallohn beim Abschluß sicherer Kontrakte auf dem 'Arbeitsmarkt', denn 1 Arbeitsstunde ist der Gegenwartswert von r Einheiten des Titels a. Angeboten werden von der Unternehmung j zunächst $r\bar{q}_j$ Einheiten von a (Bonds). Insgesamt beträgt das Bondsangebot also rL Stück zum Gegenwartswert von L[3)], was zum Ausdruck bringt, daß das Angebot von a allein aus der Nachfrage der Unternehmungen nach Arbeitsstunden resultiert.

---

1) Ohne die Tauschmöglichkeit zwischen Lohn und Gewinnanteilen ergäbe sich

$$\xi'_{is} = r\bar{q}_i + \sum_j \alpha_{ij}\gamma_{js} \quad .$$

Vgl. dagegen den Begriff des 'passiven' Vermögensinhabers.

2) Allgemeines Stichwort "Marktsysteme", siehe Abschn. 1.2.2.2, S. 21 ff.

3) $$L = \sum_j \bar{q}_j$$

Die Haushalte bieten $\bar{q}_i$ Arbeitsstunden an, bzw. fragen aus diesem Grund $r\bar{q}_i$ Einheiten von a nach. Daß die Haushalte bei Vollbeschäftigung dieses sichere Einkommen in der gleichen Höhe nachfragen (rL), wie es die Unternehmungen insgesamt anbieten, heißt jedoch nicht, daß sie es auch halten wollen. Da Haushalte gegen heutige Arbeitsstunden zunächst nur sicheres morgiges Einkommen eintauschen können, müssen sie dieses - ziehen sie eine Situation ungewissen Einkommens vor - weitertauschen.

Auf den J Aktienmärkten haben die Haushalte die Möglichkeit, ihre im Tausch gegen Arbeitsstunden erworbenen Einheiten des Titels a gegen bestimmte Kombinationen ungewisser Einkommen abzugeben. Auf dem Aktienmarkt j wird die Einheit des Titels b_j gehandelt.

$$b_j = (\beta_{j1},\ldots,\beta_{jS}) \quad \text{mit} \quad \beta_{js} = \frac{\xi_{js} - r\bar{q}_j}{N_j}$$

$$= \frac{1}{N_j}\gamma_j \quad .$$

N_j ist die Gesamtzahl der durch die Unternehmung j ausgegebenen Aktien. Die anfänglichen Anteile ihrer Inhaber errechnen sich als

$$\bar{\alpha}_{ij} = \frac{\bar{N}_{ij}}{N_j}$$

mit $\sum_i \bar{N}_{ij} = N_j$, für alle j.

Die Einheit b_j ('1 Aktie j ') wird gegen p_{b_j} Arbeitsstunden eingetauscht (Aktienkurs j).
Der Gegenwartswert des gesamten Aktienangebots der Unternehmung j beträgt

$$A_j = N_j p_{b_j} \quad .$$

A_j ist der Gegenwartswert des Gewinns γ_j , gemessen in Arbeitsstunden. Der Anteil des Haushaltes i an der Unternehmung j ist $\alpha_{ij}A_j$ als Gegenwartswert von $\alpha_{ij}\gamma_j$.

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Märkte lauten:

- für den Titel a (Bonds)

$$\sum_i rq_i = \sum_j r\bar{q}_j$$

bzw. $\sum_i q_i = \sum_j \bar{q}_j$ $\left(=\sum_i \bar{q}_i\right.$ nur bei Vollbeschäftigung),

- für den Titel b_j (Aktien)

$$\sum_i a_{ij} A_j = A_j \qquad j = 1,\ldots,J$$

bzw. $$\sum_i a_{ij} = 1 \quad .$$

Daß von diesen J + 1 Gleichgewichtsbedingungen maximal J linear voneinander unabhängig sind, zeigt folgende Überlegung:
Allgemein gilt für die gesamtwirtschaftliche Budgetgleichung:

$$\sum_i w_i = \sum_{ij} a_{ij} A_j + \sum_i q_i = \sum_{ij} a_{ij}(V_j - \bar{q}_j) + \sum_i q_i$$

$$= \sum_{ji} a_{ij} V_j + \sum_i q_i - \sum_{ji} a_{ij} \bar{q}_j \quad .$$

Wegen der Annahme der Vollbeschäftigung

$$\sum_i \bar{q}_i = \sum_j \bar{q}_j$$

gilt für die Summe der Anfangsvermögen der Haushalte, daß sie konstant und gleich der Summe der Marktwerte der Unternehmungen ist:

$$\sum_i w_i = \sum_j A_j + \sum_i \bar{q}_i = \sum_j V_j - \sum_j \bar{q}_j + \sum_i \bar{q}_i = \sum_j V_j \; ; \; \sum_i \bar{a}_{ij} = 1 \text{ für alle } j.$$

Unter diesen speziellen Annahmen folgt aus der obigen Gleichung mit dem Gleichgewicht auf allen Aktienmärkten auch automatisch Gleichgewicht auf dem Bondsmarkt.[1)]

---

1) Allgemein dagegen ist $\sum_i w_i - \sum_j V_j = \sum_i q_i - \sum_j \bar{q}_j = 0$ gerade die Gleichgewichtsbedingung für den Bondsmarkt. Vgl. in diesem Zusammenhang auch J.E. Stiglitz (1969), insb. S. 785, sowie hier Abschn. 2.2.2.3, S.112. Allgemein zu Walras' Law vgl. z.B. R. Richter, U. Schlieper, W. Friedmann (1975), S. 124 ff.

Exkurs:

Das Folgende ist als Erläuterung der - inzwischen hier schon mehrfach angesprochenen - im Teil 1 allgemein behandelten 'Residualungewißheit'[1] zu verstehen.
Bei gegebenem Bondsangebot durch die Unternehmung j stellt ihr Angebot von Titel b_j ein Residualangebot dar bei festem Güterangebot.
Insgesamt beträgt das Güterangebot durch j N_j Einheiten des (nicht gehandelten) Titels c_j.

$$x_j = N_j c_j = N_j (b_j + \frac{\bar{r} q_j}{N_j} a)$$

x_j hat den Gegenwartswert V_j

$$V_j = A_j + \bar{q}_j \quad .^{2)}$$

c_j, und damit x_j, ist als Linearkombination aus a und b_j vollständig auf den Märkten für diese beiden Titel handelbar.[3]

Daraus folgt: Wird bei konstantem Angebot von c_j bzw. x_j das Angebot von a durch j geändert, dann muß sich automatisch die Einheit des Titels b_j bei konstantem N_j sowie sein Preis anpassen

$$b_j' = c_j - \frac{\bar{r} q_j'}{N_j} a$$

mit $$A_j' = A_j + \bar{q}_j - q_j' \quad ,$$

so daß sich die Marktsituation insgesamt - beschreibbar als Angebot von $x_j = N_j c_j$ durch die Unternehmung j - nicht geändert hat.

Daß der Faktor Kapital auch teilweise gegen sichere Titel ('festverzinslich') gehandelt wird, ist ebenfalls als eine solche Umschichtung interpretierbar.[4]

---

1) Vgl. insb. S. 28.
2) Gesetz der Preisunterschiedslosigkeit
3) Was ja auch der Zweck der Einrichtung dieser Märkte ist.
4) Auf die Möglichkeit, in diesem Zusammenhang Arbeits- und Bondsmarkt zusammenzufassen, wurde bereits auf S. 83 hingewiesen.

Geht man davon aus, daß der Anfangsbestand an Kapital vollständig in Aktien gehalten wird, dann ist der Sachverhalt einfach so zu verstehen, daß das bisherige Angebot an Unternehmungsanteilen zugunsten eines äquivalenten Angebots von sicheren Titeln durch die Unternehmung ausgetauscht wird. $\frac{1}{p_a}$ ist also zugleich der sichere Bruttorealzins für die Zurverfügungstellung eines Unternehmungsanteils im Gegenwert einer Arbeitsstunde gegen sicheres Entgelt.

2.2.1.2 Grundsätzliches zur Modellwahl

Ein Abstraktionsniveau, das sich auf den Eingut-Einperioden-Fall bei vorgegebener ungewisser Produktion aus einem vollbeschäftigten variablen Faktor bei grundsätzlich zwei Entlohnungsformen für diesen beschränkt, wird nach den Überlegungen des Abschn. 1.2.2.5[1] für zulässig gehalten: Hier ist das zu untersuchende (Um-)Verteilungsproblem in seinem Kern genau so zu erkennen wie im mehrperiodigen Wachstumsfall. Modifikationen wie das Hinzufügen eines Planungshorizonts von mehr als einer Periode, von Wachstum, sowie das Einbeziehen der Notwendigkeit, das einmal verteilte Einkommen für unterschiedliche Güter verwenden zu müssen, verlangen eine erheblich kompliziertere Darstellung,[2] ohne daß Wesentliches zusätzlich erläutert würde.

Die Beschränkung auf den Einperioden-Fall ist gleichbedeutend mit dem Verzicht, Möglichkeiten der Umverteilung durch Änderung der Preisrelationen der einzelnen Vermögenspositionen auf den künftigen Kassamärkten zu analysieren. In diesem Zusammenhang ist als Spezialfall die Politik der Stabilität der Kaufkraft des Geldes zu erwähnen. Die Annahme ihrer Realisierung erlaubt u.a. die Vernachlässigung des Titels 'Geld' im vorliegenden Zusammenhang.

---

1) S. 51 ff.

2) In diesem Zusammenhang sei auf Abschn. 1.2.2.2 hingewiesen, in dem die Problematik der Optimierung im Marktfolgensystem angedeutet wird, S. 30 ff.

Geld hat in diesem Modell keinen Platz, nicht nur aus dem gerade angeführten Grund. Es kann hier zwar ohne weiteres als Recheneinheit verwendet werden. Die Kontrakte werden dann nominal, d.h. zu Geldpreisen abgeschlossen. Der Faktor Arbeit sowie die verschiedenen Einkommensansprüche werden gegen Geldeinheiten gehandelt. Bestimmt sind jedoch weiterhin nur die Austauschrelationen zwischen Arbeit und den diversen Titeln. Für Geldhaltung besteht hier keine Veranlassung. Das Transaktionsmotiv entfällt, da vorausgesetzt wird, daß keine Transaktionskosten[1] anfallen. Ebenso gibt es keinerlei Spekultationsmotiv (Geldhaltung als zeitlicher Vermögenstransfer), da nur für eine Periode und nur für den Eingutfall geplant wird. Aus diesem Grund werden die Vermögensgleichungen real, d.h. in Mengeneinheiten des Gutes 'heutige Arbeitsleistung' angegeben und die Titelmärkte so formuliert, als ob auf ihnen direkt über Realgrößen abgeschlossen würde.

Im übrigen wird auch angenommen, daß alle durch die Unternehmungen angebotenen Einkommensbeteiligungsformen frei gehandelt werden. Die gegenteilige Forderung einer Beschränkung des Handels erscheint aus prinzipiellen Gründen nicht vereinbar mit der Absicht, die individuelle Wohlfahrt durch freiwillige Umverteilung zu erhöhen. Auch würden die Betroffenen schließlich Umgehungsgeschäfte für diese Einschränkungen des Tauschs künftiger Einkommen finden. Z.B. kann man sich vorstellen, daß die Haushalte das ungewisse Einkommen aus Titeln, deren Handel ihnen untersagt ist, nun selbst anbieten. Sie können ja aus ihrem Besitz an entsprechenden Titeln dafür Sicherheiten bieten .
Das Grundmodell ist - wie oben schon angedeutet[2] - ein Anwendungsfall des in Abschn. 1.2.3.3, S. 67 ff., ausführlich behandelten allgemeinen asset-Ansatzes der Portefeuilletheorie, allerdings mit der Modifikation, daß hier[3] als Einheiten der Titel normierte Stücke mit den Preisen $p_{b_j} = A_j/N_j$[4]

---

1) Für die bestehenden Märkte.
2) Vgl. S. 84, 95 und 101.
3) Wie bei S. Fischer (1972).
4) Zur Symbolik vgl. S. 99.

fungieren, während üblicherweise[1] in der Portefeuilletheorie die Einheiten so gewählt werden, daß sie den Gegenwartswert 'eine Währungseinheit' haben und die Preise nur implizit vorkommen.

1) Vgl. z.B. J. Ebel (1971).

2.2.2 Umverteilung durch Titelangebotsvariation - vollständiges System

2.2.2.1 Das Grundmodell als Elementarsystem

Die folgenden Überlegungen sind die 'Übersetzung' des Grundmodells in die Sprache des A-D-Ansatzes.

Satz 2/1: Das Marktsystem des Grundmodells der Risikobeteiligung, bestehend aus J Aktienmärkten und dem Markt für sichere Titel ist für den Fall, daß die Anzahl der Märkte mindestens so groß ist wie die der alternativ möglichen Zustände ($J \geq S - 1$) äquivalent einem Marktsystem von S Elementaransprüchen auf morgiges Realeinkommen (vollständiges Elementarsystem).[1)]

Beweis: Sei $J = S$.[2)]
Die Menge der Outputvektoren $X = \{x_j\}$ ist eine Basis des S-dimensionalen Güterraums, denn alle x_j sind gemäß Voraussetzung linear voneinander unabhängig. Damit sind auch alle b_j wegen $x_j = N_j b_j + r\bar{q}_j a$ linear voneinander unabhängig, denn angenommen es existiere mindestens ein b_k als Linearkombination der übrigen b_j[3)], dann ließe sich damit auch x_k als Linearkombination der übrigen x_j darstellen gemäß dem Zusammenhang

$$x_k = N_k \sum_j \lambda_{kj} b_j + r\bar{q}_j a \quad , \quad j,k \in \{1,\ldots,J\} \quad , \quad j \neq k$$

d.h. $x_k \, LK\{x_j\}$.

---

1) Satz 2/1 ist als Spezialfall des allgemeinen Satzes 1/1 aus Abschn. 1.2.2.2, S. 24, unter der Berücksichtigung der Äquivalenz zwischen asset- und A-D-Ansatz zu sehen. Dies gilt analog auch für den Beweis. Allgemein hierzu vgl. insb. nochmals D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 151, siehe auch hier S. 67 , dort insb. FN 1 .

2) Gemäß den Annahmen des Grundmodells sind die J Aktien linear unabhängige Titel. Wenn J=S gilt, dann ist ein Bond darstellbar als Linearkombination der Aktien. Daß bei Existenz des Bondsmarktes zur Charakterisierung des vollständigen Systems auch S-1 Aktienmärkte genügen, ist für die grundsätzliche Beweisführung ohne Bedeutung. Daß J im Prinzip größer als S sein kann, ist aus Zweckmäßigkeitsgründen bereits in den Annahmen über das Grundmodell ausgeschlossen worden. Vgl. S. 94.

3) Dann gilt

$$b_k = \sum_j \lambda_{kj} b_j = \sum_j \lambda_{kj} \frac{x_j - r\bar{q}_j a}{N_j} \quad , \quad \lambda_{kj} > 0 \text{ für mindestens ein } j \, .$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu den Voraussetzungen. Also ist auch $B = \{ b_j \}$ eine Basis des $\mathbb{R}^S$ und alle denkbaren Güteransprüche $x \in \mathbb{R}^S$ sind als Linearkombinationen aus den b_j zu konstruieren.
Alle $x \in \mathbb{R}^S$ lassen sich aber auch aus den Elementaransprüchen e_s, $s=1,\ldots,S$ linear kombinieren

$$x = (\xi_1,\ldots,\xi_S) = \sum_s \xi_s e_s \quad . \qquad s = 1,\ldots,J$$

Dabei stellt e_s bekanntlich einen Anspruch auf eine Gütereinheit dar, der allein im Zustand s zu erfüllen ist, während er in allen übrigen Zuständen verfallen ist. e_s hat die Eintrittswahrscheinlichkeit π_{is}

$$e_s = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

wobei 1 die Komponente s ist.

Die Menge $E^S = \{ e_s \}$ bildet ein alternatives vollständiges Marktsystem für den fiktiven Handel mit allen denkbaren Güteransprüchen im S-dimensionalen Güterraum.

Folgerungen aus Satz 2/1:[1)]

Zur Erinnerung: Der zu E^S gehörige Preisvektor wird mit

$$\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_S)$$

bezeichnet. Die Dimension seiner Komponenten ist: heutige Arbeitsstunden je Gütereinheit in dem betreffenden Zustand morgen.
Für den Preis p_x eines beliebigen $x \in \mathbb{R}^S$ gilt dann

$$p_x = \sum_s \phi_s \xi_s \quad ,$$

als unmittelbare Folge des Gesetzes der Preisunter-

---

1) Diese Überlegungen gelten sowohl für Gleichgewichts- als auch für Ungleichgewichtssituationen.

schiedslosigkeit und damit der Unmöglichkeit von Arbitragegewinnen.[1)]

Speziell für das Grundmodell gilt:

1. Der sichere Titel a ist im Elementarsystem darstellbar als

$$a = \sum_s e_s \quad ^{2)}$$

mit dem Preis

$$p_a = \sum_s \phi_s$$

bzw. $$r = \frac{1}{\sum_s \phi_s} \quad .$$

---

1) Vgl. Abschn. 1.2.2.2, S. 23 f.
Die Forderung nach 'Unmöglichkeit von Arbitragegewinnen' läßt sich in den Voraussetzungen des Grundmodells wie folgt berücksichtigen

$$\sum_j \mu_j \frac{Y_j}{N_j} \leq 0 \quad \text{für alle } \mu \text{ , } \mu \neq 0 \text{ und } \sum_j \mu_j \frac{A_j}{N_j} = 0 \quad .$$

Sie beinhaltet, daß zwei verschiedene Titelkombinationen zu unterschiedlichem Gegenwartswert nicht dieselbe Güterverteilung erzeugen können. Damit ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß zu Nullkosten ein Portefeuille eingetauscht werden kann, das für keinen der möglichen S Zustände eine positive Verlustwahrscheinlichkeit hat. (Vgl. hierzu S. Fischer (1972), S. 372)
Unter der Voraussetzung der 'nc-arbitrage'-Forderung läßt sich für das vollständige System ein eindeutiges positives ϕ ermitteln aus dem Gleichungssystem

$$p_j = \sum_s \xi_{js} \phi_s \quad , \quad j = 1,\ldots,S \quad ,$$

vgl. z.B. D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 151 sowie Anhang A der vorliegenden Arbeit.

2) Im System der 'vollständigen Aktienmärkte' ($J = S$) ist außerdem

$$a = \sum_j k_j b_j$$

mit k_j, $j = 1,\ldots,S$

aus dem Gleichungssystem

$$1 = \sum_j k_j \beta_{js} \quad . \qquad j,s = 1,\ldots,S$$

(S Gleichungen)

2. Eine Aktie b_j ist darstellbar als

$$b_j = \sum_s \beta_{js} e_s$$

mit $\beta_{js} = \dfrac{\xi_{js} - r\bar{q}_j}{N_j}$

und mit dem Preis

(2-1) $$P_{b_j} = \frac{A_j}{N_j} = \frac{1}{N_j}\left[\sum_s \xi_{js}\phi_s - \bar{q}_j\right] \quad .$$

Umgekehrt ist bei bekanntem Vektor $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \end{pmatrix}$ der äquivalente Preisvektor ϕ im Elementarsystem aus dem Gleichungssystem

$$A_j + \bar{q}_j = \sum_s \xi_{js}\phi_s \qquad j,s = 1,\ldots,S \text{ (S Gleichungen)}$$

zu errechnen.

Der Lösungsvektor ϕ ist also unabhängig von der Größe der $\bar{q}_j$ bzw. A_j, sondern nur von der Größe der Summe $V_j = A_j + \bar{q}_j$ mitbestimmt.[1)]

3. Äquivalente Gegenwartswerte der Anfangsausstattungen w_i in den beiden Systemen ergeben gleiche Möglichkeitsbereiche für x_i:

$$w_i^1 = \sum_j \alpha_{ij}(V_j - \bar{q}_j) + q_i$$

bzw. $$w_i^2 = \sum_j \alpha_{ij}(\sum_s \xi_{js}\phi_s - \bar{q}_j) + q_i \quad , \quad w_i^1 = w_i^2 \quad .$$

Im Fall von S unabhängigen Aktienmärkten ergibt sich an Gütermöglichkeiten je Zustand für Haushalt i:

(2-2) $$\xi_{is}^1 = \sum_j \alpha_{ij}(\xi_{js} - r\bar{q}_j) + rq_i \quad ,$$

im Fall von S Elementarmärkten

$$\xi_{is}^2 = \sum_j \alpha_{ij}\left(\xi_{js} - \frac{\bar{q}_j}{\sum_s \phi_s}\right) + \frac{q_i}{\sum_s \phi_s} \quad ,$$

also $x_i^1 = x_i^2$

---

1) V_j: Gegenwartswert von x_j (vgl. S. 101 oben), im Folgenden 'Unternehmungswert' genannt.

wegen $r = \frac{1}{\sum_s \phi_s}$ (Folgerung 1., S.107).

Der Möglichkeitsbereich aller Haushalte insgesamt (gesamtwirtschaftliche Budgetgleichung) ist im vollständigen System gleich der Verteilung der gesamten Produktion,

bewertet $\sum_i w_i = \sum_i \sum_j \bar{a}_{ij} (\sum_s \xi_{js} \phi_s - \bar{q}_j) + \sum_i q_i = \sum_j \sum_s \bar{\xi}_{js} \phi_s = \sum_j V_j$,[1)]

real $\sum_i \bar{x}_i = \sum_j \bar{x}_j$.

4. Die individuelle Nachfrage nach Titeln, gemessen als a_{ij}, $j=1,\ldots,J$, und q_i , ergibt sich bei bekannter Nachfrage nach den Elementaransprüchen $x_i = (\xi_{i1},\ldots,\xi_{iS})$, $s=1,\ldots,S$, aus dem Gleichungssystem[2)]

(2-3) $\xi_{is} = \sum_j a_{ij} \gamma_{js} + r q_i$ $\quad j,s = 1,\ldots,S$
(S Gleichungen) .

Dabei ist der Wert für q_i beliebig wählbar. Die Werte für a_{ij} werden also nicht nur durch die Vorgabe der ξ_{is} sondern zusätzlich durch die freie Wahl der Bondsnachfrage[3)] mitbestimmt.

---

1) Unter der Annahme, daß $\sum_i q_i$ stets als $\sum_j \bar{q}_j$ realisiert wird.
Vgl. dagegen die Gleichgewichtsüberlegungen auf S.100 .

2) Analog hierzu ist auch eindeutig die individuelle Erstausstattung $\bar{x}_i$ bei gegebenen a und $\bar{q}_i$ zu ermitteln.

3) Allgemein gilt: Für den Fall $J > S - 1$ ist die Nachfrage nach Titeln und damit das Gleichgewicht auf den zugehörigen Märkten nicht eindeutig determiniert im Gegensatz zu der Nachfrage nach den Elementaransprüchen, vorausgesetzt, es besteht stets Arbitragegleichgewicht (vgl. S.107 , FN 1). Nachfrage und Angebot der restlichen J-S Titel (hier: 'des letzten Titels') sind eindeutig nur als Nachfrage und Angebot auf den Basistitelmärkten formulierbar. Dies ist darin begründet, daß zwei verschiedene Titelkombinationen unter diesen Voraussetzungen den gleichen Gegenwartswert haben und dieselbe ungewisse Güterverteilung hervorbringen können. Es existieren - so gesehen - diesbezüglich keine unabhängigen Märkte. Allgemein hierzu vgl. Abschn. 1.2.2.2, S. 24.

2.2.2.2 Optimierung

Da die Verteilung der gesamtwirtschaftlich festen Arbeitsmenge auf die Unternehmungen vorgegeben ist - und damit das ungewisse Angebot der einzelnen Unternehmungen (und das Gesamtangebot)[1] - reduziert sich die Überlegung bezüglich der individuellen Gleichgewichte auf die Maximierung der Zielfunktion der Haushalte.[2]

Gesucht ist die individuelle optimale Einkommensverteilung x_i^*, die - wie oben schon ausgeführt (S.79ff) - interpretierbar ist als die geplante Beteiligung am vorgegebenen subjektiv beurteilten Produktionsrisiko, charakterisiert durch die Vektoren x_j, $j=1,\ldots,J$, und π_i.

Die Formulierung des Maximierungsansatzes als 'asset-problem' ergibt speziell in der Schreibweise des Grundmodells

$$\max_{\{\alpha_{ij},q_i\}} Eu_i(x)$$

unter der Nebenbedingung

$$w_i = \sum_j \alpha_{ij} A_j + q_i \quad , \qquad j = 1,\ldots,S$$

x_i errechnet sich dann aus

(2-4) $$x_i' = G\alpha + rq_i a' \quad ,$$[3]

wobei die Nutzenfunktion dieselbe wie bei A-D-Ansatz ist.

Als 'A-D-Problem' formuliert, ergibt sich für das Grundmodell[4]

$$\max_{\{\xi_{is}\}} Eu(x_i) = \sum_s \pi_{is} u(\xi_{is})$$

---

1) Vgl. Modellannahmen, Abschn. 2.2.1.1, S. 93 f.

2) Wahlweise im asset- oder im A-D-Ansatz.
Dies gilt auch für den nachfolgenden Abschnitt 'Beschränktes System'.
Zur allgemeinen Darstellung siehe Abschn. 1.2.3.1, S.53 ff, sowie 1.2.3.3, S. 67 ff., was letzteres betrifft, mit der Modifikation einer nicht existierenden Restriktionsmatrix M.

3) Vgl. Folgerung 4., S. 109 , allgemein und zur Symbolik Abschn. 1.2.3.3, S. 67 ff.

4) In völliger Übereinstimmung zur Darstellung in Abschn. 1.2.3.1, S. 53 ff.

unter der Nebenbedingung der Vermögensrestriktion

$$w_i = \phi\bar{x}_i^! = \phi x_i^! \quad .^{1)}$$

Fiktive Entscheidungsparameter sind die ξ_{is}, gemäß Folgerung 4., S. 109 dann transformierbar in die tatsächlichen Entscheidungsgrößen $(a_{ij}), q_i$. Gegeben sind die subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung, die subjektive Erstausstattung mit Gütern sowie deren Preise.

Auf die Herleitung der Optimalbedingungen sei verzichtet, es wird auf den allgemeinen Teil verwiesen (Abschn. 1.2.3.1, insb. S.53ff, sowie 1.2.3.3, insb. S.75ff.).
Als Ergebnis erhält man das individuelle Gleichgewicht, gekennzeichnet durch den Planungsvektor x_i^* in Abhängigkeit von den Parametern

$$x_i^* = x_i(\bar{x}_i; \pi_i, \phi) \quad .^{2)}$$

Die $x_i(...)$ bilden ein System von S Nachfragefunktionen für die Elementaransprüche. Die 'Übersetzung' in die Nachfrage nach den diversen Titeln erfolgt anhand des Gleichungssystems (2-4) (S. 110) bei Vorgabe der linear abhängigen Nachfrage, d.h. hier der Nachfrage nach Bonds (q_i).

2.2.2.3 Gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht

Für den Gleichgewichtspreisvektor ϕ^* gilt [3)]

$$\sum_i \xi_{is}(...,\phi^*) = \sum_j \xi_{js} \qquad s = 1,...,S \quad .$$

---

1) An dieser Stelle sei nochmals auf folgenden Zusammenhang hingewiesen: Im Einperiodenfall enthält die Gleichung des Gegenwartswerts des Vermögens - nicht nur im vollständigen System - den gesamten Möglichkeitsbereich. Es gibt hier keine nicht gehandelten Ansprüche. Allein diese beeinflussen die elementare Nutzenfunktion. 'Unvollständig' kann das System nur insoweit sein, als nicht jeder Anspruch bzw. nicht jede beliebige Kombination isoliert realisierbar ist (beschränktes System). Vgl. hierzu ausführlich die Abschn. 1.2.2.2, S. 21 ff., 1.2.2.3, S. 35 ff., sowie 1.2.2.5, S. 51 ff.

2) Im vollständigen System besteht zwischen $\bar{q}_i, \bar{a}_i$ einerseits und $\bar{x}_i$ eine eindeutige Beziehung, deshalb genügt zur Charakterisierung der Erstausstattung die Angabe der $\bar{x}_i$. Dieser Zusammenhang ist nicht gegeben im beschränkten System.

3) Die zu ϕ^* gehörenden Gleichgewichtspreise A_j^*, $j=1,...,J$, errechnen sich (bei gegebenem Bondsangebot) aus den Gleichungen (2-1), Folgerung 2, S. 108.

Dabei ist im vollständigen System Walras'Law zu beachten, denn

aus $\sum_i w_i = \sum_{ij} \sum a_{ij}(V_j - \bar{q}_j) + \sum_i q_i \qquad j = 1,\ldots,S-1$

folgt mit $\sum_i a_{ij} = 1$ für alle j

$$\sum_i q_i = \sum_j \bar{q}_j$$

wegen $\sum_i w_i = \sum_j V_j$.[1)]

Nur $S-1$ Gleichungen sind linear unabhängig, d.h. nur $S-1$ Preisrelationen können errechnet werden, Mittels des vorgegebenen r und des Zusammenhangs $r = \frac{1}{\sum \phi_s}$ sind dann die absoluten Gleichgewichtspreise (in Arbeitsstunden) zu ermitteln. (Dies gilt auch für jede beliebige andere Konstellation.) Insbesondere läßt sich im Fall $J = S - 1$ vom Gleichgewicht auf den Elementarmärkten auf solches auf den Titelmärkten schließen und umgekehrt. Für den Fall $J \geq S$ läßt sich Walras' Law nur so formulieren: Wenn $J - 1$ Elementarmärkte im Gleichgewicht sind, dann gilt dies auch für den letzten Elementarmarkt.

Dies ist der Inhalt der beiden nachfolgenden Sätze.[2)]

Satz 2/2: Mit den Titelmärkten sind zugleich die Elementarmärkte im Gleichgewicht.

Beweis: Aus $\sum_i a_{ij} = 1$ für alle j (und damit $\sum_i q_i = \sum_j \bar{q}_j$ [3)])
folgt gemäß Gleichung (2-2) (Folgerung 3,S. 108)

$$\sum_i \xi_{is}(\ldots) = \sum_j \xi_{js} \quad , \quad s = 1,\ldots,S \quad .$$

---

1) Vollbeschäftigungsannahme! Vgl. hierzu oben S. 100, dort insb. auch FN 1, sowie Folgerung 3., S.108.

2) Im Hinblick auf das Grundmodell werden nur die Fälle $J \leq S$ betrachtet.

3) Unabhängig von der Gültigkeit von Walras'Law kann dieser Schluß stets vollzogen werden wegen der Form des Gleichungssystems (2-3) (Folgerung 4.), S. 109.

Damit ist der Satz für alle $J \leq S$ bewiesen.
Die Umkehrung des Satzes ist nur sinnvoll für die beiden Fälle: $J = S$ oder $J = S - 1$.

Satz 2/3: Die Umkehrung von Satz 2/2 ist nur für den Fall $J = S - 1$ gültig.

Beweis: Ausgehend von

$$\sum_i \xi_{is} = \sum_j \xi_{js} \qquad \text{für alle } s$$

läßt sich mithilfe der abgeleiteten Nachfragen

$$(2\text{-}5)\quad \sum_i \xi_{is}(\ldots) = \sum\sum_{ij} \alpha_{ij}\xi_{js} - r\sum\sum_{ij}\alpha_{ij}\bar{q}_j + r\sum_i q_i$$

das System der Gleichgewichtsbedingungen umformulieren

$$(2\text{-}6)\quad \xi_s = \sum\sum_{ji} \alpha_{ij}\xi_{js} + r\sum_i q_i - r\sum\sum_{ji}\alpha_{ij}\bar{q}_j$$

mit $\xi_s := \sum_j \xi_{js}$,

d.h. $\xi_s \mathrm{LK}\{b_j\}$.

Gesucht ist der Vektor $\Sigma\alpha = (\sum_i \alpha_{i1}, \ldots, \sum_i \alpha_{iJ})$, $j=1,\ldots,S-1$ bzw. $1,\ldots,S$, der dieses Gleichungssystem erfüllt.

Eine Lösung ist die Konstellation

$$\sum_i \alpha_{ij} = 1 \quad \text{für alle } j$$

(und damit auch $\sum_i q_i = \sum_j \bar{q}_j$), also die Gleichgewichtssituation auf den Titelmärkten.
Dies ist der einzige Lösungsvektor für den Fall $J = S - 1$, was aus dem allgemeinen Satz folgt, daß es für jeden Vektor im $+\mathbb{R}^S$, also auch für $x = (\xi_s)$ genau eine lineare Darstellung aus jeder vorgegebenen Basis gibt.

Für den Fall $J = S$ gilt:
Hier ist die Anzahl der Titelmärkte größer als die der Zustände, und damit ist die Nachfrage nach Titeln

beliebig zusammensetzbar bei gegebener Gesamtnachfrage nach Elementaransprüchen, so z.B. auch derjenigen, die gleich dem Gesamtangebot ist.[1)]

Erläuterung:

Gleichgewicht auf allen Elementarmärkten bedeutet:

$$\sum_i x_i = \sum_j \bar{x}_j \quad , \qquad j = 1,\ldots,S$$

ausführlich: $\sum_i \xi_{is} = \sum\sum_{ij} \alpha_{ij}(\xi_{js} - r\bar{q}_j) + \sum_i rq_i = \sum_j \xi_{js}$.

Im vorliegenden Fall ist dies nun (zusammen mit der Budgetbeschränkung) ein Gleichungssystem aus S Gleichungen und $S + 1$ Unbekannten $\sum_i \alpha_{ij}$, $j=1,..,S$ und $\sum_i q_i$.

Es ist z.B. die individuelle Nachfrage nach Bonds (q_i) und damit $\sum_i q_i$ beliebig vorgebbar. Es sei $\sum_i q_i \neq \sum_j \bar{q}_j$, dann gibt es einen zugehörigen Vektor $\sum\alpha = (\sum_i \alpha_{ij})$ mit $\sum_i \alpha_{ij} \neq 1$ für alle j , der Gleichgewicht auf den S Elementarmärkten garantiert.

Satz 2/3 ist eine Umformulierung der Aussage: "Es gibt - existieren mehr Märkte als Güter - keine eindeutige Zuordnung von Angebot und Nachfrage. Eine solche ist nur möglich bezüglich des Angebots und der Nachfrage auf den 'ableitbaren' Elementarmärkten."

---

1) Vgl. auch Abschn. 1.2.2.2, S. 24, sowie z.B. auch S.109, FN 3 .

2.2.2.4 Quantitative Titelmodifikation ('Angebotsvariation vom Typ A')

Als quantitative Modifikation der angebotenen Titel oder 'Angebotsvariation vom Typ A' wird jede mögliche Änderung der Struktur des vorgegebenen ungewissen Güterangebots einer beliebigen Unternehmung bei Konstanz der Titelmärkte bezeichnet.

Im Grundmodell bedeutet dies aus der Sicht der bisherigen Anteilseigner eine indifferente Umschichtung des Angebots von Anteilen am Residualeinkommen zu(un)gunsten des Angebots des sicheren Titels a bei unverändertem Gesamtangebot x_j. Die Verschiebung des Angebots zugunsten der sicheren Titel bedeutet von der Ausgangssituation her gesehen[1] die Einführung festverzinslichen Kapitals, eine Abnahme des Bondsangebots dagegen die Einführung der Beteiligungsentlohnung für unselbständige Arbeit.

Für eine beliebige Unternehmung j gilt:

Die ursprüngliche Annahme

$$x_j = N_j b_j + r\bar{q}_j a$$

ist nun zu modifizieren in

$$x_j = N_j b_j' + rq_j' a \quad ,$$

mit $q_j' \neq q_j$.[2]

Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall $q_j' < \bar{q}_j$ konzentrieren. Die Annahme $q_j' > \bar{q}_j$ verlangt die gleiche Beweisführung, ist aber aus der Sicht der Entlohnung des Faktors Arbeit ohne Bedeutung. Dieser Fall ist vielmehr geeignet - bei gegebener Entlohnung der Arbeitnehmer - die Frage nach der Finanzierungsstruktur des Kapitalstocks einer Unternehmung

---

1) Vgl. Modellannahmen (2.2.1.1), insb. S. 96, sowie auch S. 101 f.

2) Die alternative Entlohnung ändert nichts an dem vorgegebenen Arbeitseinsatz $\bar{q}_j$ jeder Unternehmung und an der Annahme der Vollbeschäftigung.

zu untersuchen. In der Tat wäre letzteres nichts anderes als die Herleitung des sogenannten Modigliani-Miller-Theorems, das seit fast 20 Jahren in der Diskussion um die optimale Finanzierungsstruktur (sprich Wahl der Entlohnungsform für den Faktor Kapital) einen zentralen Platz einnimmt.[1] Das hier verwendete Vorgehen kann als Versuch der Herstellung einer Analogie zum Modigliani-Miller-Theorem im Zusammenhang mit der Entlohnung des Faktors Arbeit gesehen werden.

Sei $q_j' = (1-\rho)\bar{q}_j$, $0 \leq \rho \leq 1$.

Diese Modifikation hat zum Inhalt, daß nun im Arbeitsmarktgleichgewicht $100 \cdot \rho$ % jeder Arbeitsstunde - und damit insgesamt $\rho \bar{q}_j$ Einheiten - mit Beteiligungsansprüchen statt mit sicheren Ansprüchen a entlohnt werden.[2]
Der Inhalt des riskablen Titels muß sich mit der Struktur des Gesamtangebots ändern, und zwar gilt

$$b_j' = \frac{x_j - r q_j' a}{N_j} \quad .^{3)}$$

Satz 2/4: Unter der Annahme eines vollständigen Marktsystems hat im Grundmodell Angebotsvariation vom Typ A keinen Einfluß auf die gesamtwirtschaftliche Gleich-

---

1) F. Modigliani & M.H. Miller (1958). Das M-M-Theorem hat zum Inhalt, daß unter den Annahmen des vollkommenen Kapitalmarktes die Wahl der Finanzierungsstruktur keinen Einfluß auf die durchschnittlichen Kapitalkosten einer Unternehmung hat. Hier sei auf Darstellung des Inhalts und der ausführlichen Debatte des ursprünglichen Zusammenhangs verzichtet (Übersichtsweise sei diesbezüglich z.B. auf H. Hax (1970), S. 122 ff. verwiesen, an neueren Beiträgen vgl. z.B. J. Mossin (1969), J.E. Stiglitz (1969)). Insbesondere Stiglitz bereicherte die Diskussion wesentlich durch Erweiterung der anfänglich restriktiven (die Kritik provozierenden) Annahmen bezüglich der Gültigkeit des Theorems. Dies gab auch den Anlaß, die Parallelen in der vorliegenden Arbeit zu ziehen. Eine empirische Stützung der Gültigkeit des Theorems liefert E.F. Fama (1974).

2) Daß es bei entsprechendem Lohnsatz und entsprechender Beteiligung prinzipiell Kombinationen (r,ρ) gibt, die im Vergleich zur Ausgangssituation sowohl von den unselbständigen Arbeitnehmern vorgezogen werden als auch von den bisherigen Anteilseignern als indifferent angesehen werden, ist in den Grundannahmen der Entscheidungstheorie unter Risiko über die Bewertung von ungewissen Ergebnissen enthalten. Vgl. hierzu auch S. 89 oben.

3) Wenn man von einem konstanten N_j ausgeht.

gewichtseinkommensverteilung.

$$\left[x^{*} = (x_1^{*},\ldots,x_I^{*}), v^{*} = (v_1^{*},\ldots,v_J^{*})\right] \quad 1)$$

Beweis: a) Angebotsvariation vom Typ A läßt bei gegebenen Titelpreisen das individuelle Vermögen w_i unverändert, da

- einerseits für die Haushalte die Abnahme des individuellen wertmäßigen Bestandes an sicheren Titeln gerade durch eine Zunahme an Beteiligungstiteln mit gleichem Gegenwartswert ausgeglichen wird und
- andererseits die gesamten sicheren Verbindlichkeiten jeder Unternehmung, die die betreffende Maßnahme praktiziert, im Wert um genau soviel abnehmen wie der zusätzliche Anteil der Inhaber der Arbeitsstunden $\bar{q}_j$ am gesamten Residualeinkommen γ_j zunimmt.

$$w_i^2 = \sum_j \bar{a}_{ij}(v_j - (\bar{q}_j - \Delta\bar{q}_j) - \Delta\bar{q}_j) + (\bar{q}_i - \Delta q_i) + \Delta q_i$$

$$= \sum_j \bar{a}_{ij} A_j + \bar{q}_i$$

$$= \sum_j v_j \quad 2)$$

$$= w_i^1 \quad .$$

b) Für den Möglichkeitsbereich des Haushalts i gilt:

$$(2\text{-}7) \quad x_i = \sum_j a_{ij}\gamma_j + rq_i a$$

unter Berücksichtigung der Vermögensrestriktion

$$w_i = \sum_j a_{ij} A_j + q_i \quad .$$

So läßt sich die Gleichung (2-7) umformen in

---

1) Im Folgenden stets kurz mit (x^{*}, v^{*}) gekennzeichnet.

2) Vgl. auch S. 108, Folgerung 3.

$$x_i = r(w_i - \sum_j a_{ij}A_j)\,a + \sum_j a_{ij}\gamma_j$$

$$= r\left[w_i - \sum_j a_{ij}(V_j - \bar{q}_j)\right]a + \sum_j a_{ij}(x_j - r\bar{q}_j a)$$

$$= r(w_i - \sum_j a_{ij}V_j)\,a + \sum_j a_{ij}x_j \quad .$$

Der individuelle Möglichkeitsbereich x_i ist also eine Funktion des individuellen Anfangsvermögens w_i, der Outputvektoren x_j, der Unternehmungswerte V_j und des Reallohnsatzes r.[1)]

c) Da weder die x_i noch die x_j bei unverändertem w_i unter den Annahmen des Grundmodells durch eine Änderung des Quotienten $q_j/(A_j + q_j) = q_j/V_j$ von ihren ursprünglichen Werten abweichen, ist gezeigt, daß der individuelle Möglichkeitsbereich bei gegebenen Marktpreisen r und V_j durch die zu untersuchende Umverteilungsmaßnahme unbeeinflußt bleibt. Damit verändert sich aber auch das Maximierungsergebnis[2)] nicht, d.h. insbesondere auch nicht die Gesamtnachfrage nach Elementaransprüchen. Das Gesamtangebot ist laut Voraussetzung konstant.

Also gilt:
Die Gleichgewichtseinkommensverteilung bleibt durch eine Angebotsvariation vom Typ A unbeeinflußt.

Satz 2/4 läßt sich folgendermaßen interpretieren:

- Da sich die Nachfrage nach dem sicheren Titel im gleichen Ausmaß ändert wie das Angebot auf diesem Markt,[3)]

---

1) Für den Fall $J = S$ ist r auf dem Arbeitsmarkt bestimmt. Im vollständigen System sind dann die V_j unter der Restriktion $r = \frac{1}{\sum \phi_s}$ im Prinzip beliebig kombinierbar.

2) Vgl. oben S. 110 f.

3) Unter unseren Annahmen (vgl. S.115) also zurückgegangen ist.

hat sich dann, wenn bisher auf allen Titelmärkten Gleichgewicht geherrscht hat,[1] auch auf allen Aktienmärkten die Nachfrage dem dort nun jeweils wertmäßig (und inhaltlich) gestiegenen Angebot angepaßt. Damit sind auch auf den Elementarmärkten Nachfrage und Angebot, d.h. insbesondere die Gleichgewichtswerte und ϕ^* unverändert (Satz 2/2, zur Verdeutlichung vgl. auch Folgerung 4., S.109).

- Bei unverändertem fiktivem Gleichgewichtspreisvektor ϕ^* bleiben die Unternehmungswerte V_j^* (und damit auch der Gleichgewichtsreallohn r^*) unverändert. (Vgl. Folgerungen 1. und 2., S. 107f.)

- Die Gleichgewichtspreise für die Aktien ändern sich entsprechend

$$A_j'^{**} = V_j^* - q_j'$$

bei gegebenem N_j .

Zur Verdeutlichung diene der Fall einer extremen Modifikation, und zwar der des Übergangs zur reinen Beteiligungsentlohnung.

Werden zunächst die eingesetzten $\bar{q}_j$ in allen Unternehmungen sicher entlohnt, so existieren Gleichgewichtspreise A^*, r^*, bei denen jeder Haushalt Bonds im Wert von

netto $\quad \hat{q}_i^* = w_i - \sum_j a_{ij}^* V_j$

und damit brutto $\quad q_i^* = \hat{q}_i^* + \sum_j a_{ij}^* \bar{q}_j$ [2]

nachfragt.

Im Fall reiner Beteiligungsentlohnung reduziert sich die Bruttonachfrage nach sicheren Kontrakten auf die Nettonachfrage. Bei vorgegebener Nettonachfrage (diese ist die eigent-

---

1) Wie erinnerlich ist die Nachfrage nach dem Titel a im vorliegenden System $J = S$ unbestimmt. Dagegen ist für $J = S - 1$ bzw. im beschränkten System eine eindeutige Aussage bezüglich rq_i' möglich. Vgl. z.B. S.113 (Satz 2/3).

2) Beachte: $\bar{q}_j$ ist als 'Bondsangebot' definiert.

liche Planungsgröße) wird der Rückgang der indirekten Verschuldung für jedes i durch die Zunahme der direkten (Brutto-)Verschuldung im gleichen Ausmaß kompensiert.

Insgesamt gilt hier also $\Delta q_i = -\sum_j \alpha_{ij} \bar{q}_j$ für alle i

und damit auch $\sum_i \Delta q_i = -\sum_{ij} \alpha_{ij} \bar{q}_j = -\sum \bar{q}_j$,

was gerade gleich dem Rückgang des Angebots an sicheren Titeln durch die Unternehmungen insgesamt ist, d.h. wenn ursprünglich ein Gleichgewicht auf dem Markt für sichere Titel bestanden hatte bei r^*, so besteht es weiterhin bei diesem Reallohn.

Der Rückgang der Nachfrage nach sicheren Titeln bedeutet andererseits bei gleichem Anfangsvermögen die Möglichkeit, Beteiligungen zu kaufen, sie wird genutzt, und zwar weil es für jeden Haushalt möglich ist, nun die zusätzlich angebotenen Beteiligungen in dem Ausmaß aufzukaufen, daß gerade die ursprünglichen individuellen Beteiligungen (Gleichgewichtswerte α^*_{ij}) aufrecht erhalten bleiben und damit auch die ursprünglichen Einkommensendverteilungen, denn:

Bei sicherer Kontrahierung im Ausmaß $\bar{q}_j$ gilt im Gleichgewicht

$$x_i^* = \sum_j \alpha^*_{ij}(x_j - r\bar{q}_j a) + rq_i^* a \qquad \text{für alle } i.$$

Eine relative Änderung des Angebots sicherer Titel von seiten der Unternehmungen im Ausmaß $0 < \rho \leq 1$ bewirkt eine Abnahme der individuellen Bondsnachfrage um

$$\Delta q_i^* = -\sum_j \alpha^*_{ij} \rho \bar{q}_j \quad .$$

Mit diesem Gegenwartswert (in Arbeitsstunden) kauft sich Haushalt i nun von jeder Unternehmung zusätzlich Aktien im Wert von $\alpha^*_{ij} \rho \bar{q}_j$.

Dann gilt weiterhin (im neuen Gleichgewicht**)

$$\alpha^{**}_{ij} = \alpha^*_{ij} \qquad \text{für alle } i \text{ und } j,$$

denn $A_j^{**} = A_j^* + \rho \bar{q}_j$ für alle j (bei unverändertem V^*)

und damit ist

$$x_i^{xx} = r(q_i - \Sigma_j \alpha_{ij}^{x} \rho \bar{q}_j)a + \Sigma_j \alpha_{ij}^{xx}(x_j - r(1-\rho)\bar{q}_j a)$$

$$= x_i^{x} \quad .^{1)}$$

2.2.2.5 Qualitative Titelmodifikation ('Angebotsvariation vom Typ B')

Als qualitative Modifikation des Titelangebots oder 'Angebotsvariation vom Typ B' wird die Änderung der Struktur des vorgegebenen ungewissen Güterangebots beliebiger Unternehmungen unter Berücksichtigung der Forderung der Angebotsneutralität durch die Einführung neuer Tauschobjekte bezeichnet.

Im Grundmodell bedeutet dies die Schaffung neuer Titel, z.B. sei ein solcher

$$d = (\delta_1, \ldots, \delta_S) \quad ,$$

mit dem Angebot von T_j Stück je Unternehmung j . Eine Einheit des Titels d garantiert ihrem Inhaber im morgigen Zustand s jeweils die Gütermenge δ_s. Die Unternehmung j bietet nun den Eignern des Faktors Arbeit für dieselbe Inputmenge $\bar{q}_j$ anstatt des Bondsangebots in Höhe von $r\bar{q}_i$ diesen Titel d in Verbindung mit einem festen Lohnbestandteil r' an.
Wegen der Wahrung der Güterangebotsbeschränkung ist Angebotsvariation vom Typ B immer zugleich mit einer Änderung des Inhalts mindestens eines bisher schon vorhandenen Titels verbunden, also unter den getroffenen Annahmen ohne eine solche vom Typ A nicht möglich.
Für die Zusammensetzung des gesamten Angebots der Unternehmung j können wir nun schreiben:

---

1) Letztlich ist dies natürlich der Zusammenhang

$$x_i^{xx} = \Sigma_j \alpha_{ij}^{x} x_j + r\bar{q}_i^{x} a \quad .$$

$$x_j = N_j b_j'' + T_j d + r q_j'' a$$

mit $q_j'' = (1-\rho)\bar{q}_j$

und $p_d T_j = \rho \bar{q}_j$.[1)]

Der neue zustandsabhängige Gewinn der Unternehmung j ergibt sich somit als

$$\gamma_{js} = \xi_{js} - (\delta_s T_j + r q_j'') .[2)]$$

Das Anfangsvermögen der Haushalte bleibt unverändert; es lautet in seinen verschiedenen Varianten

$$w_i = \sum_j \bar{a}_{ij} A_j + (1-\phi)\bar{q}_i + \rho \bar{q}_i$$

$$= \sum_j \bar{a}_{ij} \sum_s \gamma_{js} \phi_s + \bar{q}_i$$

$$= \sum_s \xi_{js} \phi_s \quad .$$

Damit ergibt sich als neuer Möglichkeitsbereich der Haushalte

$$(2\text{-}8)\quad x_i^1 = \sum_j a_{ij} \left[x_j - (T_j d + r q_j a) \right] + T_i d + r q_i a$$

mit $w_i = \sum_j a_{ij} A_j + p_d T_i + q_i$.

Satz 2/5: Unter der Annahme eines vollständigen Marktsystems beeinflußt Angebotsvariation vom Typ B im Grundmodell die Gleichgewichtseinkommensverteilung (x^*, V^*) nicht.

Beweis: Der Einfachheit halber sei wieder $J = S$ angenommen.[3)] Wegen der linearen Unabhängigkeit der x_j und wegen $J = S$ ist d ein Element des

---

1) Zur Begründung vgl. S.116, FN 2.

2) Somit $b_j'' = \frac{\gamma_j''}{N_j}$.

3) Vgl. zur Begründung S.105, FN 2 .

S-dimensionalen Vektorraums, stets[1] als Linearkombination der Elemente der Menge $\{x_j\}$ darstellbar, nämlich

$$d = \sum_j \hat{\delta}_j x_j$$

mit $(\hat{\delta}_j)$ als Lösungsvektor des Gleichungssystems

$$\delta_s = \sum_{j=1}^{S} \hat{\delta}_j \xi_{js} \quad , \quad s = 1,\ldots,S \quad .$$

Damit ist gleichzeitig p_d bestimmt als

$$p_d = \sum_{j=1}^{S} \hat{\delta}_j V_j \quad .$$

Gleichung (2-8) läßt sich daher umformulieren als

$$\hat{x_i} = \sum_j \alpha_{ij}(x_j - T_j \sum_{k=1}^{S} \hat{\delta}_k x_k - r q_j a) + T_i \sum_{k=1}^{S} \hat{\delta}_k x_k + r\left[w_i - \sum_j \alpha_{ij}(V_j - T_j \sum_k \hat{\delta}_k V_k - q_j) - T_i \sum_k \hat{\delta}_k x_k\right]$$

$$= \sum_j \hat{\alpha}_{ij}(x_j - r q_j a) + r\left[w_i - \sum_j \hat{\alpha}_{ij}(V_j - q_j)\right] a$$

mit $\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \sum_k \alpha_{ik} T_k \hat{\delta}_j + T_i \hat{\delta}_j$.

Damit ist gezeigt, daß sich eine Angebotsvariation vom Typ B für das vollständige System stets auf eine solche vom Typ A zurückführen läßt. Was die weitere Beweisführung betrifft, kann deshalb auf Abschnitt 2.2.2.4, S.117 verwiesen werden.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel:

Sei $d^* = (\delta_1^*,\ldots,\delta_S^*)$

mit $$\delta_s^* = \begin{cases} \frac{\sum \xi_{js}}{\xi_o} - r & \text{falls } \frac{\sum \xi_{js}}{\xi_o} > r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$ [2]

---

1) Es ist zu beachten, daß die Beweisführung auch für $J<S-1$ gilt, wenn zuvor gezeigt werden kann, daß

$$d = \sum_j \hat{\delta}_j x_j + \hat{\delta}_a a \quad , \quad j = 1,\ldots,J \quad , \quad J<S-1$$

gilt. Hier kann d LK $\{x_j, a\}$ sein, muß es aber nicht.

2) ξ_o kann man sich in einer wachsenden Wirtschaft z.B. als realisiertes Sozialprodukt der Vorperiode vorstellen.

Wegen der Annahme eines vollständigen Systems ist dieser Titel darstellbar als Linearkombination von Elementaransprüchen bzw. Outputvektoren

$$d^{\varkappa} = \sum_{s} \delta^{\varkappa}_{s} e_{s} = \sum_{j} \hat{\delta}^{\varkappa}_{j} x_{j}$$

mit dem Preis $p^{\varkappa}_{d} = \sum_{s} \delta^{\varkappa}_{s} \phi_{s} = \sum_{j} \hat{\delta}^{\varkappa}_{j} V_{j}$.[1)]

Bei Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt bietet jede Unternehmung T_j Einheiten des Titels $d^{\varkappa}$ im Gegenwartswert von $p_d T_j = \rho \bar{q}_j$ Arbeitsstunden an, während ihr Bondsangebot gleichzeitig auf $(1-\rho)\, r\bar{q}_j$ Einheiten im Gegenwartswert von $q_j = (1-\rho)\bar{q}_j$ Arbeitsstunden zurückgeht. Gemäß Satz 2/5 bleibt im vollständigen System die Gleichgewichtseinkommensverteilung unverändert. Inwieweit diese Schlußfolgerung - insbesondere auch für dieses Beispiel - im beschränkten System gültig ist, wird im Abschn. 2.2.3 untersucht.

2.2.2.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Es wurde gezeigt, daß im vollständigen System sowohl das individuelle als auch das gesamtwirtschaftliche Gleichgewicht der Risikoverteilung bei gegebenem Güterangebot der Unternehmungen und bei gegebener Verteilung der Erstausstattungen der Haushalte unabhängig ist von der Aufspaltung des Güterangebots in diverse Titel. Unter den genannten Annahmen ist die Zerlegung der durch die Unternehmungen angebotenen Güterkontrakte in solche über sichere und solche über Residualeinkommen willkürlich wählbar, sie ist im vollständigen System stets als Angebotsvariation vom Typ A interpretierbar und beeinflußt in keinem Fall die Gleichgewichtsverteilung der insgesamt vorgegebenen elementaren Güteransprüche.

---

1) Es sei schon hier darauf hingewiesen, daß diese Titelkonstruktuion im Kern des Vorschlags des Sachverständigenrates zur Vermögensbildung der Arbeitnehmer durch Risikobeteiligung enthalten ist. Vgl. SR, JG 1972/73, Ziff. 501 ff. Genauer wird auf dieses Konzept in Abschn. 2.2.4 eingegangen werden.

In anderen Worten: Der Versuch der Umverteilung durch Angebotsvariation läßt den Reallohn, die Gegenwartswerte der Unternehmungen - die Werte der einzelnen riskablen Titel passen sich gemäß ihrem 'Inhalt' an - und insbesondere die Einkommen der Haushalte aus Beteiligung und sicherer Entlohnung für jeden ungewissen Zustand unverändert, vorausgesetzt, es wird jeweils Gleichgewicht realisiert. Die hier untersuchte Titelumstrukturierung bedeutet für die Haushalte keine Veränderung der ursprünglichen Risikosituation, insbesondere was ihren vorgegebenen Anteil am Risiko und seine Tauschmöglichkeiten betrifft.

Der aufgezeigte Zusammenhang ist die Folge einer Anwendungsanalogie des Modigliani-Miller-Theorems aus dem Bereich der Finanzierungstheorie.

2.2.3 Umverteilung durch Titelangebotsvariation - beschränktes System

Im Grundmodell ist das beschränkte[1] System dadurch charakterisiert, daß die Anzahl der linear voneinander unabhängigen Outputvektoren - und damit die Anzahl der Handelsobjekte in Form von Aktien - kleiner ist als die Anzahl der möglichen Zustände S. Bei Vorhandensein eines Bondsmarktes muß $J < S - 1$ angenommen werden, damit die Möglichkeit ausgeschlossen ist, daß bei Handel aller Unternehmungsgewinne im Prinzip alle denkbaren Güterkombinationen mit S Komponenten als Linearkombinationen aus den Handelsobjekten 'produzierbar' sind. Allgemein gilt: Mit der Wahl von $J + 1$ Aktionsparametern (sprich Mengeneinheiten der Handelsobjekte) sind zugleich bestimmte Elementaranspruchskombinationen als Elemente des S-dimensionalen Güterraums festgelegt. Damit sind z.B. für einen Haushalt prinzipiell nur $J + 1$ Komponenten seines Verbrauchsplans durch Bestimmung der Nachfrage nach Titeln frei wählbar, die übrigen $S - J - 1$ ergeben sich simultan über die Restriktionsmatrix.[2] Ceteris paribus wird deshalb der Verbrauchsplan eines Haushalts in der Regel anders ausfallen als im vollständigen System.[3]

Im Folgenden wird noch einmal skizziert, wie im beschränkten System des Grundmodells das individuelle[4] und das gesamtwirtschaftliche Portefeuillegleichgewicht bestimmt werden.
Anschließend werden die Möglichkeiten der Beeinflussung dieses Gleichgewichts durch die verschiedenen Formen der Titel-

---

1) Zur allgemeinen Charakterisierung vgl. Abschn. 1.2.2.2, S. 25 ff., spezieller siehe Abschn. 1.2.3.3.

2) Vgl. Abschn. 1.2.3.3, insb. S. 69 ff..

3) Vgl. hierzu die Ergebnisse der entsprechenden allgemeinen Abschnitte 1.2.3.1 und 1.2.3.3, S. 75 ff.

4) Unter den getroffenen Annahmen reduziert sich auch hier die Überlegung auf die Maximierung der Zielfunktion der Haushalte. Es gilt analog das in Abschn. 2.2.2.2, S. 110 , insb. auch in FN 2 Gesagte.

angebotsvariation analog zu den Überlegungen der Abschnitte 2.2.1.4 und 2.2.1.5 untersucht.

2.2.3.1 Optimierung

Wir beschränken uns hier auf die 'Übersetzung' des Grundmodells in den asset-Ansatz.[1)]

Für den Haushalt i gilt:

$$\underset{\{\alpha_{ij},q_i\}}{\text{Max}} \; Eu(x_i) = \sum_s \pi_{is} u(\xi_{is})$$

unter den S 'Nebenbedingungen'[2)]

$$\begin{aligned} \xi_{is} &= \sum_j \alpha_{ij}(\xi_{js} - r\bar{q}_j) + rq_i && s=1,\ldots,S \\ &= \sum_j \alpha_{ij}(\xi_{js} - r\bar{q}_j) + r\left[w_i - \sum_j \alpha_{ij}(V_j - \bar{q}_j)\right] && j=1,\ldots,J \\ &= \sum_j \alpha_{ij}\xi_{js} + r(w_i - \sum_j \alpha_{ij}V_j) && J<S-1 \end{aligned} \tag{2-9}$$

durch geeignete Wahl der J + 1 Aktionsparameter α_{ij}, q_i mit der Einschränkung $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$. Gegeben sind dabei wieder die subjektive Wahrscheinlichkeitsvorstellung π_i, die individuellen Anfangsausstattungen $\bar{q}_i$, $\bar{\alpha}_{ij}$, sowie die Preise

---

1) Zur allgemeinen Darstellung sowie bezüglich des Nachweises der Äquivalenz der Einkleidung des Problems als portefeuillethecretischer Ansatz zu derjenigen der Formulierung im beschränkten A-D-System wird auf Abschn. 1.2.3.3 verwiesen.

2) Als Zusammenfassung der hier zu beachtenden Restriktionsmatrix M des Zulässigkeitsbereichs und der individuellen Budgetgleichung. Dabei ist die Bedingung der Vermögensbeschränkung $w_i = \sum_j \bar{\alpha}_{ij}A_j + \bar{q}_i = \sum_j \alpha_{ij}A_j + q_i$ in der Umwandlung der Gleichungen bereits berücksichtigt.
Das Problem, daß für bestimmte Teile der künftigen individuellen Güterausstattung kein Marktwert existiert und damit das Vermögen nicht eindeutig bestimmbar ist (vgl. z.B. J.B. Long, Jr. (1972b)), entfällt gemäß den Annahmen. Hier läßt sich das Vermögen nur nicht beliebig in seine elementaren Komponenten aufspalten, was bedeutet, daß deren Gegenwartswert nicht bestimmt ist. Vgl. hierzu auch S.111, FN 1.

r und $\frac{A_j}{N_j}$.[1]

Als Ergebnis der einzelnen Schritte

- Substitution der ξ_{is} in der Zielfunktion durch die S Ausdrücke in den α_{ij} ,
- Ableitung der Zielfunktion nach den Aktionsparametern,
- Nullsetzen dieser Ableitungen

erhält man das individuelle Portfeuille- bzw. Einkommensgleichgewicht,[2] gekennzeichnet als $\left[\alpha_i^* = (\alpha_{i1}^*,\ldots,\alpha_{iJ}^*), q_i^*\right]$ [3]

mit $\alpha_{ij}^* = \alpha_{ij}(w_i,\pi_i;r,V_j)$.

Mit Hilfe der α_{ij}^* [4] errechnet sich die zugehörige individuelle Nettonachfrage[5] nach dem sicheren Titel aus der Vermögensrestriktion als

$$(2\text{-}10) \qquad \tilde{q}_i^* = w_i - \sum_j \alpha_{ij}^* V_j \left(= q_i^* - \sum_j \alpha_{ij}^* \bar{q}_j\right) \quad .$$

Brutto beträgt dann die optimale Nachfrage nach Bonds

$$(2\text{-}11) \qquad q_i^* = w_i - \sum_j \alpha_{ij}^* A_j = \tilde{q}_i^* + \sum_j \alpha_{ij}^* \bar{q}_j \quad .$$

Der Planungsvektor des optimalen ungewissen Einkommens x_i^*

---

1) Und damit auch V_j bei gegebener-z.B. sicherer - Entlohnungsform für $\bar{q}_j$.

2) Vgl. hierzu insb. S. 74 f.

3) Kurz (α_i^*, q_i^*).

4) Aus dem Gleichungssystem der Optimalbedingungen 1. Ordnung zu ermitteln. Allgemein: System (1-4), S. 75.

5) Die Nettonachfrage nach Bonds ist definiert als

$$\tilde{q}_i = q_i - \sum_j \alpha_{ij} \bar{q}_j$$

mit q_i als Bruttonachfrage.
Vgl. auch oben, S. 119.

ergibt sich dann aus dem Gleichungssystem (2-9) (S. 127) als

$$\xi^{x}_{is} = \xi_{is}(w_i, \pi_i, r, V_j) \quad .$$

Zu den Ergebnissen:

Die Nachfrage nach den diversen Aktien hängt unter den getroffenen Annahmen nicht von den Aktienkursen und von der Aufteilung des Titelangebots in Aktien und Bonds ab, sondern u.a. vielmehr nur von den Güterangeboten der Unternehmungen und deren Marktwerten V_j.

Mit der optimalen Beteiligung an der Unternehmung j geht der Haushalt i zugleich eine indirekte Verschuldung ein - bei sicherer Entlohnung des Faktors Arbeit z.B. in Höhe von $a_{ij}\bar{q}_j$. Für die als Differenz zwischen direkter und indirekter individueller Verschuldung zu ermittelnde Nettonachfrage nach Bonds - die hier im Gegensatz zum vollständigen System eindeutig bestimmt ist - gelten die gleichen Abhängigkeiten wie für die Aktiennachfrage, d.h. insbesondere, daß sie unabhängig ist von dem Angebot von sicheren Kontrakten durch die Unternehmungen, an denen i beteiligt ist. Die Nettonachfrage $\tilde{q}_i$ gibt an, wieviel Haushalt i letztlich an sicheren Titeln hält, um sich aus seinem Gesamtbestand an assets seine optimale Risikobeteiligung zusammenzusetzen. $r\tilde{q}^{x}_i$ wird im allgemeinen ungleich dem sicheren Einkommen als Anspruch aus der individuell vorgegebenen unselbständigen Arbeit ($\bar{q}_i$) sein.

Die Bruttonachfrage nach Bonds q_i als direkte 'Verschuldung' von i ist im Gegensatz zur Nettonachfrage geradezu bestimmt durch den Verschuldungsgrad der Unternehmungen, deren Beteiligungen gehalten werden, und zwar so, daß sie mit dem Verschuldungsgrad variiert (vgl. Gleichung (2-11), S. 128) bei gegebenem realem Angebot der betreffenden Unternehmungen zwecks Anpassung an die[1)] bestimmte optimale individuelle Nettonach-

1) Im Gegensatz zum vollständigen System.

frage nach Bonds (Gleichung (2-10), S. 128) infolge der veränderten indirekten Verschuldung gemäß Beteiligungsgrad.

Die Unbestimmtheit der Bruttonachfrage nach Bonds[1] - bei der Behandlung der Fragestellung im vollständigen System schon unter etwas anderem Aspekt erwähnt (vgl. oben S.119) - ist in der Finanzierungstheorie[2] unter dem Namen Modigliani-Miller-Theorem bekannt.

2.2.3.2 Gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht

Die Summation der $\alpha^{x}_{ij}, \tilde{q}^{x}_{i}$ bzw. q^{x}_{i} über die i ergibt die gesamtwirtschaftliche Nachfrage nach den einzelnen Titeln. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Märkte lauten

$$\text{(2-12)} \qquad \begin{aligned} &\textstyle\sum_i \alpha^{x}_{ij}(\ldots) = 1 \quad , \quad j = 1,\ldots,J \\ &\textstyle\sum_i \tilde{q}^{x}_{i}(\ldots) = 0 \quad .^{3)} \end{aligned}$$

Von diesen $J + 1$ Gleichungen sind bei Annahme von Vollbeschäftigung des Arbeitsangebots nur J linear unabhängig.

Satz 2/6: Im beschränkten System impliziert die Annahme der individuellen Vermögensbeschränkung kein Walras' Law[4] in dem Sinn, daß aus dem Gleichgewicht auf J Aktienmärkten stets Gleichgewicht auf dem Bondsmarkt folgt.

Beweis: Die gesamtwirtschaftliche Budgetgleichung als Folge konsistenter Planung lautet im Grundmodell der Risikobeteiligung

$$\text{(2-13)} \qquad \textstyle\sum_i w_i = \sum_{ij}\alpha_{ij}A_j + \sum_i q_i \quad .$$

1) Im 'vollständigen System $J = S$ ' ist auch die Nettonachfrage nach Bonds unbestimmt. Vgl. insbesondere S. 113 f.

2) Vgl. hierzu die Ausführungen auf S. 116, FN. 1 .

3) Bzw. $\textstyle\sum_i q^{x}_{i} - \sum_j \bar{q}_j = 0$.

4) Vgl. oben S. 100 und den dortigen Verweis in FN 1 .

Gleichgewicht auf den J Aktienmärkten bedeutet:

$$\sum_i \alpha^{\times}_{ij}(\ldots)A^{\times}_j = A^{\times}_j \quad ^{1)} \qquad \text{für alle } j = 1,..,J \ .$$

Aufsummiert über die j ergibt dies

$$\sum_j \sum_i \alpha^{\times}_{ij}(\ldots)A^{\times}_j = \sum_j A^{\times}_j \ .$$

Eingesetzt in Gleichung (2-13) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_i w_i &= \sum_j A^{\times}_j + \sum_i q^{\times}_i(\ldots) \\ &= \sum_j V^{\times}_j + \sum_i q^{\times}_i(\ldots) - \sum_j \bar{q}_j \\ &= \sum_j V_j + \sum_i \tilde{q}^{\times}_i(\ldots) \ . \end{aligned}$$

Dies zeigt: Mit der Annahme $\sum_i \alpha^{\times}_{ij} = 1$ für alle j ist also wegen der Vermögensbeschränkung nicht automatisch

$$\sum_i \tilde{q}^{\times}_i = 0 \ ,$$

also Gleichgewicht auf dem 'letzten' Titelmarkt gegeben. Vielmehr muß die Nettobondnachfrage[2)] gerade so groß sein, daß die Restriktion konsistenter Planung erfüllt ist. Für das totale Gleichgewicht im beschränkten System ist also im allgemeinen die Gleichgewichtsbedingung für den Bondsmarkt (bzw. Arbeitsmarkt) eine weitere notwendige, von den übrigen Gleichgewichtsbedingungen unabhängige Forderung.[3)]

---

1) $\frac{A^{\times}_j}{N_j}$: "Gleichgewichtskurs".

2) $\sum_i \tilde{q}^{\times}_i = 0$, also $\sum_i q_i = \sum_i \bar{q}_i = \sum_j \bar{q}_j$ (gilt nur unter der Annahme von Vollbeschäftigung).

3) Vgl. hierzu auch J.E. Stiglitz (1969), S.785 , sowie auch oben S. 100.

So bilden die Gleichgewichtsbedingungen (S. 130) ein Gleichungssystem in $J + 1$ linear unabhängigen Gleichungen in den $J + 1$ Gleichgewichtspreisen. Unter geeigneten Bedingungen[1] liefert dieses Gleichungssystem (zusammen mit der Arbeitsmarktgleichung) also den Gleichgewichtspreisvektor

$$(r^*; v_j^*) \quad ,$$

der die gesamtwirtschaftliche ungewisse Vollbeschäftigungsgütermenge (Einkommen) in jedem Zustand s derart auf die Haushalte verteilt, daß jedes i den Erwartungswert seines Nutzens maximiert, in anderen Worten: seine Planungsgrößen bezüglich der Risikobeteiligung, bzw. seines Verbrauchs in jedem Zustand innerhalb der vorgegebenen Restriktionen realisiert.

Daß im gesamtwirtschaftlichen Portefeuillegleichgewicht automatisch auch für jeden Zustand die gesamtwirtschaftliche Nachfrage nach Gütern gleich dem vorgegebenen Angebot ist, folgt aus Satz 2/2.[2]

2.2.3.3 Angebotsvariation vom Typ A

Bezüglich der Definition und Interpretation des Begriffs wird auf Abschnitt 2.2.2.4 (S.115) verwiesen.

Analog zu Satz 2/5 (S. 122) gilt der

Satz 2/7: Der Versuch der Einkommensumverteilung vom Typ A bleibt auch im beschränkten System wirkungslos.

Beweis: Beweis von Satz 2/5.[3]

Wie im vollständigen Fall gilt:

1. Für jedes Wirtschaftssubjekt ist die durch das veränderte Angebot je Titel induzierte Nachfrageänderung je asset analog den Erläuterungen auf S.128 ff. bzw. S.118 ff. gerade

---

1) Vgl. Abschn. 2.2.2.2, insb. S.110, FN 4 .

2) S. 112.

3) Vgl. S. 122 f. Die dortige Beweisführung ist unabhängig von der Voraussetzung der Vollständigkeit des Marktsystems.

so groß, daß das ursprünglich vorhandene[1] individuelle und damit auch gesamtwirtschaftliche Portefeuillegleichgewicht nicht gestört wird.

2. Die Gleichgewichtspreise (V_j^x, r^x) bleiben unverändert.

3. Wegen des veränderten Titelinhalts[2] passen sich die Gleichgewichtspreise für die Aktien bei gegebenem N_j gemäß

$$A_j^{!x} = V_j^x - q_j^! \quad \text{an.}$$

2.2.3.4 Angebotsvariation vom Typ B[3]

Im beschränkten System sind zwei Fälle der qualitativen Änderung des Titelangebots zu unterscheiden:

- Der neue Titel läßt sich auf eine Linearkombination der bereits vorhandenen Titel zurückführen. (Solche Titel seien im Folgenden mit $\hat{a}$ gekennzeichnet - im Fall a!) Bzw.
- der neue Titel stellt eine echte Erweiterung der Märkte dar (im Folgenden mit $\tilde{d}$ bezeichnet - Fall b).

Fall a): Unter der Voraussetzung, daß $\hat{a}$ eine Linearkombination aus den b_j und a ist, ist das Ergebnis des Abschnitts 2.2.1.5 (Satz 2/5) mit unveränderter Beweisführung (vgl. S. 122 f) zu übernehmen.

Als Beispiel mag die normierte Beteiligung an der Gesamtproduktion dienen:

$$\hat{\hat{d}} = \frac{\Sigma x_j}{N} = \frac{1}{N}(\Sigma N_j b_j + \Sigma r\bar{q}_j) \quad .^{4)}$$

Somit gilt ganz allgemein der

Satz 2/8: Umverteilung der Einkommen durch Schaffung

---

1) Zu einem solchen gehört im beschränkten System stets Gleichgewicht auf dem Bondsmarkt im Gegensatz zum vollständigen System, vgl. S. 114 .

2) $\gamma_j^! = x_j - rq_j^!a$.

3) Definition und Interpretation siehe Abschn. 2.2.2.5, S. 121.

4) N: Stückzahl des Titels $\hat{\hat{d}}$.

neuer Entlohnungsformen, die sich direkt oder indirekt auf den Inhalt 'Quantitative Titelmodifikation' reduzieren lassen, hat unter den Annahmen des Grundmodells der Risikobeteiligung, unabhängig von der Annahme über das Marktsystem, nicht das angestrebte Ergebnis; sie läßt die Gleichgewichtseinkommensverteilung unberührt.

Fall b): Ist der neue Titel nicht als Linearkombination der bisher vorhandenen darstellbar - im beschränkten System ist eine derartige Basiserweiterung grundsätzlich möglich - gilt

Satz 2/9: Im beschränkten System kann die Einführung eines neuen Titels bei gegebenem individuellem Gegenwartswert der ungewissen Einkommen den individuellen Möglichkeitsbereich (= Anfangsvermögen) und damit die Gleichgewichtseinkommensverteilung verändern.

Beweis: Es werde zusätzlich zu den Titeln b_j und a der Titel $\tilde{d}$ gehandelt, der keine Linearkombination der übrigen Titel ist. Damit ist auch $p_{\tilde{d}}$ nicht einfach eine Linearkombination der V_j und r.

Die Unternehmung j kann nun ihr vorgegebenes reales Angebot beliebig in drei echte Teilangebote aufspalten.

$$x_j = N_j b_j' + T_j \tilde{d} + r q_j' a \quad ,^{1)}$$

mit

$$V_j = A_j' + p_{\tilde{d}} T_j + q_j' \qquad (= A_j' + \bar{q}_j) \quad .$$

---

1) T_j = Anzahl der durch Unternehmung j angebotenen Titeleinheiten $\tilde{d}$.

Für jeden Haushalt bleibt das Vermögen w_i gemäß den Annahmen nur unverändert, wenn V_j unverändert bleibt:

$$w_i = \sum_j \bar{\alpha}_{ij}(V_j - \bar{q}_j) + \bar{q}_i$$

wegen der Annahme der Angebotsneutralität.

Damit wird das Güterangebot je Unternehmung wie folgt auf die I Haushalte verteilt:

$$\tilde{x}_i = \sum_i \alpha_{ij}\gamma_j' + T_i\tilde{\delta} + rq_i'a$$

$$= \sum_i \alpha_{ij}(x_j - T_j\tilde{\delta}) + T_i\tilde{\delta} + ra\left[w_i - \sum_i \alpha_{ij}(V_j - p_{\tilde{\delta}}T_j) - p_{\tilde{\delta}}T_i\right] .^{1)}$$

Im Unterschied zum vollständigen System[2] läßt sich dieser Zusammenhang im allgemeinen nicht auf x_i zurückführen, und zwar deswegen, weil sich gemäß Voraussetzung $\tilde{\delta}$ gerade nicht in der Form

$$\tilde{\delta} = \sum_j \hat{\delta}_j b_j + \delta_a a = LK\{x_j, a\}$$

darstellen läßt.

So sind c.p. die Gleichgewichtswerte für die schließliche Einkommensverteilung bei gegebenem riskablem Gesamteinkommen grundsätzlich andere. Eine andere Gleichgewichssituation kann eintreten wegen der zusätzlich gegebenen Möglichkeiten der Aufspaltung des realen Angebots. Sie muß, wenn sie eintritt, im Ergebnis von mindestens einem Haushalt besser und von allen anderen unverändert beurteilt werden, denn sonst wäre ja die ursprüngliche - weiterhin mögliche - Situation von allen wieder gewählt worden.[3)]

Als Zwischenergebnis läßt sich festhalten:
Die einzige Möglichkeit, im Grundmodell Einkommen durch die

---

1) Die sicheren Verbindlichkeiten der Unternehmungen 'kürzen' sich heraus.

2) Vgl. oben S.120 und 123 .

3) Dies gilt z.B. nicht für den sog. 'Fall des Separationstheorems', vgl. Abschn. 2.2.3.6., S. 138 ff.

Wahl der Entlohnungsformen umzuverteilen, ergibt sich nach den vorangegangenen Überlegungen aus dem Angebot neuer Titel im Sinne von 'linear unabhängig' durch die Unternehmungen, ein beschränktes Marktsystem vorausgesetzt.

Diese Folgerung bedarf jedoch einer weiteren Einschränkung: Es sind Bedingungen denkbar, unter denen die Gleichgewichtsverteilung der riskablen Einkommen auch durch die Hinzunahme neuer Titel im o.a. Sinne nicht beeinflußt werden kann.[1)]

Im folgenden Abschnitt sollen zwei solcher Spezialfälle dargestellt werden, für die das Modigliani-Miller-Theorem sozusagen in modifizierter Form gilt.

2.2.3.5 Angebotsvariation vom Typ B - der Fall identischer Haushalte

Die I Haushalte heißen identisch, wenn alle das gleiche Anfangsvermögen w, die gleiche elementare Nutzenfunktion $u(x_s)$ (d.h. gleiche Risikopräferenzen) und identische Wahrscheinlichkeitsvorstellungen $*$ [2)] haben.

Satz 2/10: Im Fall identischer Haushalte ist im Grundmodell unabhängig vom Marktsystem keine Umverteilung durch Titelangebotsvariation möglich.

Beweis:[3)] Identische i bedeuten identische Pläne, insb. auch identische Gleichgewichtswerte

$$\alpha_{ij}^{*} = \alpha_{j}^{*} \qquad \text{für alle } j$$

und

$$T_i^{*} = T^{*} \quad .[4)]$$

---

1) Vgl. S. 135 , FN 3.

2) Man spricht in diesem Zusammenhang von objektiver Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Ereignisse.

3) Es ist ausreichend, den Beweis für den Fall der Angebotsvariation vom Typ B im beschränkten System zu führen.

4) T: Titelstückzahl

So läßt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_i \alpha^{*}_{ij} = 1 \qquad \text{für alle } j$$

$$I\alpha^{*}_{j} = 1$$

ableiten und damit

$$\alpha^{*}_{j} = 1/I \quad \text{für alle } j.$$

Ebenso gilt

$$IT^{*} = \sum_j T_j \ ,$$

also

$$(2\text{-}14) \quad T^{*}_{i} = \frac{1}{I}\sum_j T_j = \sum_j \alpha^{*}_{ij} T_j \qquad \text{für alle } i \ .$$

Die Bedingung (2-14) ist aber notwendig und hinreichend für die Gleichheit von

$$x_i = \sum_j \alpha_{ij} x'_j + r(w_i - \sum_i \alpha_{ij} V_j) \quad 1)$$

und

$$\tilde{x}'_i = \sum_j \alpha_{ij}(x_j - T_j\tilde{d}) + T_i\tilde{d} + r\left[w_i - \sum_j \alpha_{ij}(V_j - p_d T_j) - p_d T_i\right] \quad 2)$$

für alle i bei gegebenen Preisen r und V_j.

---

1) Beachte: w_i ist unverändert, wenn V_j unverändert bleibt.

2) Vgl. S. 135 , FN 1 .

2.2.3.6 Angebotsvariation vom Typ B - der Fall der Gültigkeit des Separationstheorems[1)]

Separationstheorem

Unter den Annahmen

- objektiv gegebener Erwartungswerte μ_j und Kovarianzen σ_{jk} [2)] bezüglich der Vermögensalternativen und
- der Anwendung des (μ,σ)-Kriteriums bei der individuellen Beurteilung alternativer ungewisser Einkommen

gilt das von J. Tobin (1958) erstmals aufgezeigte Separationstheorem der Portefeuilletheorie - im Folgenden kurz 'Separationstheorem' genannt -,[3)] angewendet auf den vorliegenden Fall unter den Bedingungen des vollkommenen Kapitalmarktes:[4)]

Satz 2/11: Ein Portefeuillegleichgewicht bei J Aktien und einer sicheren Anlagemöglichkeit besteht unter den oben genannten Voraussetzungen dann, wenn das individuelle Portefeuille eine Kombination aus der sicheren Anlageform und einem Anteil β_i am

---

1) Vgl. auch J.E. Stiglitz (1969), insb. S. 789 ff., der eine ähnliche Fragestellung in ähnlicher Form für die Variation der Finanzierungsstruktur untersucht. Vgl. auch oben S. 116.

2) Insoweit objektive Wahrscheinlichkeitsverteilung, im Folgenden mit

$$P := (\mu_1,\ldots,\mu_J);\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1J}\\ \vdots & \sigma_{kj} & \vdots\\ \sigma_{J1} & \cdots & \sigma_{JJ}\end{pmatrix},\quad k,j\in\{1,\ldots,J\}$$

bezeichnet.
Zur Definition von μ_j und σ_{jk} vgl. Anhang B, S.169 .

3) J. Tobin (1958), S. 82 ff.;"... the proportionate composition of the non-cash assets is independent of their aggregate share of the investment balance." (S. 84), zur Weiterentwicklung vgl. insb. W.F. Sharpe (1964), J. Lintner (1965a und b), sowie J. Mossin (1966), insb. S. 775 ff.
Anhang B (S. 168 ff.) bringt eine komprimierte Darstellung der Portefeuilletheorie und in diesem Zusammenhang auch die Herleitung des Separationstheorems und seiner Voraussetzungen.
Bezüglich der Äquivalenz und ihrer Grenzen zwischen Zeit-Zustand-Präferenztheorie und Portefeuilleansatz sei nochmals auf S.168 FN 1 und den dortigen Verweis aufmerksam gemacht.

4) Siehe Anhang B, S. 168.

sogenannten Marktportefeuille darstellt. Dabei ist das Marktportefeuille $\tilde{M}$ [1] durch die Einheit

$$b = \frac{A_1}{\sum_j A_j} b_1 + \ldots + \frac{A_J}{\sum_j A_j} b_J \qquad \left[= \sum_j \frac{A_j}{\sum_j A_j} b_j \right]$$

gekennzeichnet. $\tilde{M}$ enthält also die einzelnen Unternehmungsanteile gemäß ihrem Anteil $\frac{A_j}{\sum_j A_j}$ am Gesamtwert aller Aktien.[2]

Verallgemeinerung des Anwendungsbereichs

Eine Ausweitung der Voraussetzungen für die Gültigkeit des Separationstheorems bzw. der Interpretation dieser Voraussetzungen ist möglich. Sie erhöht jedoch - wie sich zeigen wird - die Wahrscheinlichkeit der praktischen Relevanz dieses die Unwirksamkeit von Umverteilung mittels Entlohnungsformen induzierenden Theorems im hier untersuchten Grundmodell der Risikoverteilung nur geringfügig. Es sind grundsätzlich zwei Fälle der Verallgemeinerung des Theorems zu unterscheiden:

a) eine allgemein zulässige Einschränkung der individuellen Nutzenfunktion auf den Fall des $(\mu\text{-}\sigma)$-Kriteriums infolge der Annahme dazu geeigneter objektiver Wahrscheinlichkeitsverteilungen, was einer Einengung der zulässigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei grundsätzlich beliebiger Nutzenfunktion entspricht,

b) eine Ausweitung der mit dem Separationstheorem zu vereinbarenden individuellen Nutzenfunktionen bei beliebigen objektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Zu a):

Die Voraussetzung, daß μ und σ als einzige Argumente in der individuellen Nutzenfunktion vorkommen, ist äquivalent zu der Annahme einer quadratischen elementaren Nutzenfunktion

---

1) Dagegen bedeutet M 'Restriktionsmatrix', vgl. z.B. S. 68. Zum Inhalt von $\tilde{M}$ vgl. auch Anhang B, S.171 .

2) Die Aktienkurse passen sich so lange an, bis diese Bedingung gilt.

in Abhängigkeit vom morgigen ungewissen Einkommen

$$u(x) = a + bx + cx^2 \quad 1)$$

ohne einschränkende Annahme bezüglich der zu bewertenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Läßt man dagegen die Annahme beliebiger Verteilungen fallen und unterstellt stattdessen für das zu bewertende Ergebnis (hier: Portefeuilleertrag einer Periode, bzw. ungewisses Einkommen x_i in $t = 1$) einengend (μ-σ)-Klassen der Verteilung - speziell die Normalverteilung -, so ist zwar eine zusätzliche Spezifikation der individuellen Nutzenfunktion im obigen Sinne nicht erforderlich, es genügen die objektiven Grundannahmen der Rationalität (vgl. oben S. 43 ff.), die dann implizieren, daß sich die Nutzenfunktion auf den quadratischen Fall reduziert.[2)] In dem hier untersuchten Zusammenhang ist der zentrale Grenzwertsatz der Statistik[3)], der zur Rechtfertigung der Annahme der Normalverteilung dienen könnte,[4)] ohne Bedeutung: Die Verteilung eines einperiodigen (fiktiven) Investmentfonds, ist wohl kaum eine Normalverteilung. Die Forderung der Gleichverteilung der Unternehmungsergebnisse ist durch die Voraussetzung von mehr als einer Risikoklasse verletzt, die der stochastischen Unabhängigkeit durch die eindeutige Zuordnung der unterschiedlichen Unternehmungsergebnisse zu bestimmten Zuständen. Damit erscheint also der Anwendungsbereich des (μ-σ)-Kriteriums für unseren Fall - und damit die Gültigkeit des Separationstheorems in diesem Sinne - nicht erweiterbar.

---

1) Siehe z.B. H. Schneeweiß (1967), S. 96, auch J. Tobin (1958).

2) Vgl. J. Tobin (1958), S. 76, H. Schneeweiß (1967), S. 121, bzw. 129 ff., sowie D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 148.

3) Die Verteilung einer Summe einer genügend großen Anzahl stochastisch unabhängiger, gleich verteilter Zufallsvariablen wird durch die Normalverteilung approximiert. Vgl. z.B. E. Kreyszig (1965).

4) Zulässig erscheint die Annahme der Normalverteilung jedoch, wenn das Grundmodell als Approximation des Mehrperiodenfalls betrachtet wird und die Zufallsvariable der Produktionsindex der einzelnen Perioden ist.

Zu b):

Eine Verallgemeinerung des Separationstheorems über die Annahmen bezüglich der zulässigen Nutzenfunktionen bei beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen findet sich bei D. Cass & J.E. Stiglitz (1970). Als Teilergebnis ist ihrer Arbeit zu entnehmen,[1] daß in einer Wirtschaft, die dem beschränkten A-D-System mit einer sicheren Anlagemöglichkeit entspricht,[2] unter der Annahme allgemeinerer Nutzenfunktionen als der in x^3[3] quadratischen das Separationstheorem verallgemeinerungsfähig ist.
Cass & Stiglitz zeigen, daß das Vorhandensein eines sicheren Titels neben einer beliebigen Anzahl von riskablen Titeln < S-1 - im Extremfall eines Investmentfonds - zwecks Aufspaltung eines vorgegebenen ungewissen Güterangebots ausreichen kann, damit jede Wirtschaftseinheit ihre optimale Risikobeteiligung realisiert, die sie auch in einem vollständigen System realisieren würde.[4] Umgekehrt, bedeutet dies, daß unter den genannten Voraussetzungen die Ausweitung eines beschränkten Systems durch Hinzufügen eines neuen Titels keine Änderung des gesamtwirtschaftlichen Portefeuillegleichgewichts bewirken kann, in unserem Sinne also keine Einkommensumverteilung möglich ist.

---

1) Vgl. D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), insb. S. 133, 142 und 149.
2) Bei Cass & Stiglitz 'generalized markets with money' genannt, vgl. D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 141.
3) In der Terminolcgie der vorliegenden Arbeit, bei Cass & Stiglitz als Vermögen der nächsten Periode w bezeichnet.
4) Cass & Stiglitz definieren die Eigenschaft der Separationsmöglichkeit wie folgt allgemein und für den Spezialfall zweier Titel:
- "... a class of utility functions exhibits the generalized separability property if and only if for any arbitrary set of n original securities there are m < n mutual funds

$$\mu_{j\theta} = \sum_i \delta_{ij}\rho_{i\theta} \; ; \quad j = 1,\ldots,m$$

such that the optimal allocation of an individual with a utility function in that class can be represented simply by some allocation among the mutual funds

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} a'_j \delta_{ij} \quad \text{with} \quad \sum_{j=1}^{m} a'_j = 1 \qquad i = 1,\ldots,n \quad ..." .$$

Fortsetzung S. 142 .

Dies wird wie folgt einsichtig: Wenn sich das vollständige System auf zwei Titel reduzieren läßt derart, daß das Gleichgewicht des vollständigen Systems weiterhin (unabhängig von der Reduktion der Märkte) noch erreicht wird, so wird eine asset Aufspaltung (J<S-1) des gegebenen realen ungewissen Gesamtbereichs, die dieselbe Reduktion auf zwei Titel zuläßt, kein anderes Ergebnis haben - gleiche Anfangsvermögensverteilung vorausgesetzt - da ja der Bereich, aus dem alle Haushalte ihre Optimalwerte wählen, der gleiche wie im ersten Fall ist, und damit auch der zugehörige gesamtwirtschaftliche paretooptimale Zustand.

Die nach Cass & Stiglitz für unseren Fall in Frage kommenden Nutzenfunktionen haben entweder die Eigenschaft

$$u'(x) = (a + bx)^c$$

oder $$u'(x) = ae^{bx} \quad ,$$

wobei u' den Grenznutzen der elementaren Nutzenfunktion bei Differentiation nach der Variablen x[1] (Einkommen in t=1) bezeichnet. a,b,c sind numerische Parameter.

Spezialfälle des ersten Typs[2] sind
- die quadratische Nutzenfunktion[3]
- sowie die Nutzenfunktion, die konstante relative Risikoaversion impliziert.[4]

Für den Spezialfall $b = \frac{1}{B}$, $a = e^{-bB}$ liefert der zweite Typ die Nutzenfunktion der Klasse, die konstante absolute Risiko-

---

Forts. FN 4, S. 141:
- "When the number of the mutual funds is two, m=2, we shall say that the class the utility functions exhibits the separability property or that there is separation.", D. Cass & J.E. Stiglitz (1970), S. 124 f.
  Übersetzung der Symbole: θ=s, $\rho_{i\theta}=\gamma_{js}$, m=J, n=I, $a_j^i = \beta_j$.

1) = w bei Cass & Stiglitz
2) Vgl. hierzu D. Cass & J. Stiglitz (1970), S. 128.
3) Separationstheorem im eigentlichen Sinne; c = 1.
4) $b = 0 \; . \; \frac{u''(x)x}{u'(x)} = \text{konstant} \; (= -c)$.

   Zum Begriff der Risikoaversion vgl. den Verweis auf S. 41 oben, FN 3.

aversion beinhaltet.[1)]

Auch im Fall b) ist die Verallgemeinerung begrenzt: Sie beschränkt sich auf einige weitere Spezialfälle von Risikoaversion.

Anwendung im Grundmodell

Das Separationstheorem beinhaltet, daß die Anteile an allen vorhandenen riskablen Papieren gleich und damit gleich dem Anteil an dem Marktportefeuille $\tilde{M}$ sind.

Im Portefeuillegleichgewicht gilt danach

a) $$\sum_i \beta_i^x = 1$$

(Damit auch für alle j:

$$\sum_i \alpha_{ij}^x = 1$$

und

b) $$\sum_i q_i^x = \sum_j \bar{q}_j$$

mit $$w_i = \beta_i^x A_{\tilde{M}} + q_i^x = \sum_j \alpha_{ij}^x A_j + q_i^x \quad , \quad A_{\tilde{M}} = \sum_j A_j$$

also $$\beta_i^x = \frac{\sum_i \alpha_{ij}^x A_j}{\sum_j A_j} \quad .$$

Im Grundmodell ohne Modifikation der Entlohnung gilt also unter diesen speziellen Annahmen:

Die optimale Beteiligung ist eine solche an fiktiven Unternehmungen j, die alle die Verteilung $(x;P)$ 'produzieren', und zwar anteilig gemäß dem anteiligen Produktionswert $\frac{A_j}{\sum_j A_j}$. 2)

1) $b = \frac{1}{B}$, $a = e^{-bB}$; $\frac{-u''(x)}{u'(x)}$ = konstant (= -b).

2) Dagegen unterscheiden sich die tatsächlichen Unternehmungen des Modells gerade dadurch, daß sie linear voneinander unabhängige Produktionsergebnisse haben (= J unterschiedliche Risikoklassen).

Satz 2/12: Bei Gültigkeit des Separationstheorems für das Gleichgewicht der Einkommensverteilung ist im Grundmodell durch Angebotsvariation keine Umverteilung zu erzielen.

Beweis:[1] Es gilt für die individuellen Möglichkeiten zu Gleichgewichtspreisen

- ohne Titel $\tilde{d}$:

$$x_i^1 = \beta_i \left(\sum_j x_j - \tau \sum_j \bar{q}_j\right) + \tau \left(w_i - \beta_i \sum_j A_j\right) a$$

$$= \beta_i \sum_j x_j + \tau \left(w_i - \beta_i \sum_j V_j\right) a ,$$

- mit Titel $\tilde{d}$:

$$x_i^2 = \beta_i' \sum_j \left[x_j - \tilde{d} T_j - \tau \sum_j q_j' a\right] + T_i \tilde{d} + \tau \left(w_i - \beta_i' \sum_j A_j - p_{\tilde{d}} T_i\right) a$$

$$= \beta_i' \left[\sum_j x_j - \tilde{d} \sum_j T_j\right] + T_i \tilde{d} + \tau \left[w_i - \beta_i' \left(\sum_j V_j - p_{\tilde{d}} \sum_j T_j\right) - p_{\tilde{d}} T_i\right] a .$$

Die erneute Anwendung des Separationstheorems nach Einführung des Titels $\tilde{d}$ verlangt

$$T_i = \beta_i' \Sigma T_j \quad \text{für alle } i$$

Damit ergibt sich

$$x_i^2 = \beta_i' \Sigma x_j + \tau (w_i - \beta_i' \Sigma V_j) a = x_i^1 ,$$

$$\beta_i' = \beta_i .$$

---

1) Auch hier genügt die Beschränkung auf den Nachweis der Unbeeinflußbarkeit der individuellen Möglichkeitsbereiche durch die Einführung von Entlohnungsformen des Typs B im beschränkten System. Vgl. auch S. 136 FN 3.

2.2.4 Zu den Ergebnissen

2.2.4.1 Bemerkungen zur Gültigkeit der unterstellten Theorien

Ob die verwendeten theoretischen Zusammenhänge die Realität der Vermögensanlage widerspiegeln und ob in diesem Sinne Umverteilung über Titelangebotsvariation möglich ist, dies muß letztlich Gegenstand einer empirischen Überprüfung sein.[1] Hier nur einige rudimentäre Bemerkungen.
Was die praktische Relevanz des Separationstheorems betrifft, ist noch Folgendes anzufügen:

Das inzwischen nun schon klassich zu nennende Kapitalmarktmodell von W.F. Sharpe (1964), J. Lintner (1965 a,b) und J. Mossin (1966) ('capital asset pricing model' - im folgenden mit SLM-Modell abgekürzt) steht seit über zehn Jahren unvermindert im Mittelpunkt der wissenschaftlichen Diskussion auf dem Gebiet der Finanzierungstheorie.[2] Solange die praktische Relevanz der idealisierenden abstrakten Modellwelt nicht widerlegt ist, bleiben die in ihr gültigen Forderungen beachtenswert.[3]
Jensen (1972) bietet eine Auswahl der wichtigsten Arbeiten die empirische Überprüfung der Gültigkeit des SLM-Modells, und damit des Separationstheorems betreffend, Er kommt dabei

---

1) Ein Test, inwieweit die zitierten Aussagen von D. Cass & J.E. Stiglitz (1970) zutreffen (Separationstheorem), wäre z.B. möglich mit Hilfe der damit verknüpften Aussagen über die Nachfrage nach Titeln. Für den hier betrachteten Fall muß danach die Nachfrage nach Titel z_i linear im Anfangsvermögen sein

$$z_i = a_i w_o + b_i .$$

2) Vgl. z.B. die Übersichtsarbeiten von M.C. Jensen (1972) sowie J. Lintner (1975), S. 263: "Although the original derivations of this model relied upon restrictive assumptions ... subsequent work has shown that the essential structure of the model is remarkably robust to genealizations...".

3) So auch W.F. Sharpe (1964), S. 434: "... since the proper test of a theory is not the realism of its assumptions but the acceptability of its implications, and since these assumptions imply equilibrium conditions which form a major part of classical financial doctrine, it is far from clear that this formulation should be rejected especially in view of the dearth of alternative models leading to similar results."

zu folgender Wertung:

"The currently available empirical evidence seems to indicate that the simple version of the asset pricing model does not provide an adequate description of the structure of expected security returns. ... Virtually all of (the) assumptions (of the SLM-Model) have been criticized as inappropriate ... However, as we have seen, most of the assumptions of the model have been shown to be capable of relaxation without destroying the essential nature of the results, ... the mean-variance approach to asset valuation under uncertainty shows promise of a remakable robustness." (M.C. Jensen (1972), S. 391f.)

Auf die Schilderung des speziellen Vorgehens bei den Tests sei hier verzichtet, zu diesem Zweck sei auf die o.a. Arbeit von Jensen verwiesen.

Hier nur soviel an allgemeinen Bemerkungen: Querschnittsanalysen stützten die zu testende Theorie nicht.[1)]

Dies liegt wohl nicht zuletzt an der in dem einperiodigen Fall enthaltenen Annahme stationärer Bedingungen, die in der Realität kaum gegeben sein dürften. Dagegen sind modifizierte Zeitreihenanalysen[2)] konsistent mit den Folgerungen des SLM-Modells.

Einen empirischen Test, der die Gültigkeit des Modigliani-Miller-Theorems stützt, unternahm E.F. Fama (1974).

2.2.4.2 Relevanz der Ergebnisse - allgemein

Die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte im Rahmen der vereinfachenden Annahmen des Grundmodells sind insoweit allgemeingültig, als sie auf beliebige Titelkombinationen anwendbar sind. So lassen sie die Vermutung zu, daß in jedem Ansatz zur Einkommensumverteilung mittels Beteiligungsentlohnung unter der Voraussetzung der Freizügigkeit jeglichen Handels von vornherein die Tendenz zur Rückkehr zum Status quo enthalten ist. Jeder andere Umverteilungsvorschlag ist daraufhin zu überprüfen, ob er sich im Kern nicht auch als

---

1) Vgl. z.B. G.W. Douglas (1969), M.H. Miller & M. Scholes (1972).

2) So z.B. F. Black, M.C. Jensen & M. Scholes (1972), N. Jacob (1971).
Zur Stützung des SLM-Modells vgl. auch R.C. Merton (1973).

Gewinnbeteiligung - und damit als umverteilungsunwirksam - einstufen läßt. Übrig bleiben - nach Anwendung dieses Auswahlkriteriums - als positiv zu wertende Vorschläge Titel, die die Wahlmöglichkeiten tatsächlich ausweiten.

Da die Realität infolge prohibitiv wirkender Informationskosten eher durch ein beschränktes bzw. Marktfolgensystem abgebildet wird, ist eine solche Angebotserweiterung grundsätzlich möglich. Es ist allerdings zu fragen, ob es in einem System, in dem Informationskosten als prohibitiv für die Einrichtung von Märkten vermutet werden, als konsistente 'Möglichkeit der Verbesserung' angebracht ist, im Rahmen der Faktorentlohnung zwingend komplexe Titel vorzuschreiben. Vermutlich werden diese im Zuge der Entlohnungsverwendung wieder eine Vielzahl von Tauschvorgängen induzieren,[1] bzw. den unfreiwilligen Inhabern dieser Titel bei entsprechend hohen Transaktionskosten die Übernahme von unerwünschtem Risiko aufzwingen (vgl. Analogie zum Zwangssparen). Bei diesbezüglichen Zweifeln scheint es im Hinblick auf die gesamtwirtschaftliche Wohlfahrt angebracht, die Einrichtung neuer Kapitalmärkte zwar zu schaffen, die Benutzung dieser für bestimmte Kontrakte aber nicht zur Vorschrift zu machen. Wer sich vom Eintausch solcher neuen Handelsobjekte einen Vorteil verspricht, wird sie benutzen als Anlageform für künftige ungewisse Einkommen.
Eine Politik im Hinblick auf eine optimale Risikoverteilung könnte z.B. darauf hinauslaufen, daß der Staat bzw. die Unternehmungen für ihren Kreditbedarf als Gegenwartswert ihres Angebots an ungewissen künftigen Ansprüchen nicht nur die traditionellen Formen der Beteiligungs- bzw. Fremdfinanzierung wählen, sondern zusätzlich eine für die Verzinsung analog einem neuen Titel $\bar{d}$ [2] ausgestaltete Form anbieten.

---

1) In der vorliegenden Arbeit blieb dieser Gesichtspunkt wegen der Annahme nicht vorhandener Transaktionskosten außer Betracht.

2) Z.B. denjenigen des Demonstrationsfalls im nachfolgenden Abschnitt.

um es noch einmal zu betonen: Entscheidend für die Wirksamkeit marktkonformer Umverteilung von Einkommensansprüchen ist nicht, daß den Anbietern des Faktors Arbeit eine neue Entlohnungsform angeboten wird, sondern, daß denen, die ihren gegenwärtigen Bestand an künftigen Gütern umstrukturieren wollen, eine neue Form der Vermögensanlage angeboten wird, und daß - ganz generell - die individuellen Informationen über die Märkte verbessert werden.[1)]

2.2.4.3 Relevanz der Ergebnisse - gezeigt anhand eines Beispiels

Die Fähigkeit der hier vorgenommenen Analyse, Aussagen von wirtschaftspolitischer Relevanz zu machen, läßt sich anhand eines Beispiels für Angebotsvariation vom Typ B demonstrieren, das als wesentlicher Bestandteil in dem Vermögensbildungsvorschlag des Sachverständigenrats aus dem Jahre 1972[2)] zu finden ist.

---

1) Dem an dieser Stelle denkbaren Einwand, durch eine anfänglich erzwungene Risikobeteiligung, z.B. mittels vorgeschriebener Entlohnungsformen gewöhne man bestimmte Bevölkerungsgruppen an für sie ungewohnte Formen der Vermögensbildung, verhelfe man ihnen also geradezu zu einer Verbesserung der Markttransparenz, kann entgegen gehalten werden, daß solche Werbungsmaßnahmen doch wohl eher auf freiwilliger Basis und als 'risikolose' Einführung in solche Märkte vorgenommen werden sollten. Um es sehr überspitzt zu formulieren:"Wird man, um die Nachfrage nach pharmazeutischen Erzeugnissen zu erhöhen, die Arbeiter der chemischen Industrie mit diesen Produkten real entlohnen?"

2) SR-Gutachten 1972/73, Ziff. 505 ff., vgl. auch oben S. 124. Der SR-Vorschlag enthält zusätzlich Gewinnbeteiligungselemente, außerdem ist er für den Mehrperiodenfall konzipiert, was hier keine Rolle spielt.
Der Mehrperiodenfall erweitert die zu betrachtende Güterwelt auf das T-Fache, ändert jedoch nicht die hier angesprochene grundsätzliche Problematik. Vgl. hierzu Abschn. 1.2.2.5, S. 51f. Daß Beteiligung auch gegen künftige Ansprüche aus Arbeit angeboten werden soll, bedeutet nicht, daß human capital hier (auch nicht teilweise) handelbar gemacht wird, sondern nur, daß die Kreditfähigkeit der Arbeitnehmer (eventuell) erhöht wird. Vgl. hierzu insbesondere oben S. 31 f.

Der neue Titel $\bar{d}$, der in das Grundmodell mit der Absicht eingeführt wird, die Vermögensbildung zugunsten der Arbeitnehmer zu fördern, ohne diejenige der Kapitaleigner zu mindern, sei folgendermaßen konstruiert:

Der Arbeitseinsatz ist zu entlohnen mit der Zusage eines sicheren Einkommens in $t = 1$ in Höhe von r' Gütereinheiten je Arbeitsstunde auf jeden Fall und - falls das gesamte Produktionsergebnis der Wirtschaft derart ausfällt, daß ein bestimmter Anteil desselben, hier η genannt,[1] größer ist als die sichere Lohnsumme $r'\Sigma_j \bar{q}_j$, ist dieser Anteil auf die Arbeitnehmer gemäß ihrem Anteil an L zu verteilen. Dem entspricht folgende Modifikation des Grundmodells:

Neben den J verschiedenen Unternehmungsanteilen und dem sicheren Titel a wird nun zusätzlich der neue Titel $\bar{d}$ gehandelt

$$\bar{d} = (\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_S) \text{ mit } \bar{\delta}_s = \begin{cases} \dfrac{\eta\xi_s - r'\Sigma_j \bar{q}_j}{\Sigma_j \bar{q}_j} & \text{für } \eta\xi_s > r'\Sigma_j q_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

zu dem Preis $p_{\bar{d}}$.

Angeboten werden danach je Unternehmung $\bar{q}_j := y_j$ Einheiten des neuen Titels, insgesamt also L Einheiten. Der feste Gesamtwert L[2] verteilt sich folgendermaßen auf die beiden Titel

$$\begin{aligned} L &= p_{\bar{d}} L + (1-p_{\bar{d}})L \\ &= \Sigma_j \left[(1-p_{\bar{d}})\bar{q}_j + p_{\bar{d}} \bar{q}_j \right] . \end{aligned}$$

Eine Arbeitsstunde ist also der Gegenwartswert der Kombination

$$\bar{d} + \frac{r'\Sigma_j \bar{q}_j}{L} a .$$

---

1) z.B. $\eta = \dfrac{r_o \Sigma_j \bar{q}_j}{x_o}$ als realisierte Lohnquote der Vorperiode in einem Mehrperiodenmodell.

2) Annahme der Angebotsneutralität bezüglich der Produktion.

Dieser Ausdruck stellt somit die neue Entlohnung des Faktors Arbeit dar.

Der Titel $\bar{d}$ ist nun daraufhin zu untersuchen, ob er zur Einkommensumverteilung geeignet ist.
Ein vollständiges System und die Annahmen des Grundmodells unterstellt, läßt sich die Frage mit Hinweis auf Abschn. 2.2.2, dort insb. S. 122, direkt verneinen, denn hier ist $\bar{d}$ als Linearkombination bisheriger Handelsobjekte bereits existent, d.h. stets eigentlich eine umverteilungsunwirksame Beteiligungsentlohnung

$$\bar{d} = \sum_s \bar{\delta}_s e_s \quad .$$

Unter der Annahme eines beschränkten Systems ist zunächst zu überlegen, ob $\bar{d}$ eventuell auch hier als Linearkombination der vorhandenen J Aktien, sowie des sicheren Titels bereits existiert.
Es wird behauptet:

$\bar{d}$ stellt eine Erweiterung der Tauschmöglichkeiten dar, vorausgesetzt, es gilt für mindestens ein s: $\eta\xi_s < r' \sum_j q_j$.

Dies läßt sich wie folgt beweisen:

Die Menge $\{b_j, j=1,\ldots,J; a\}$ ist eine Basis im $J+1$-dimensionalen Vektorraum.

Sei $\quad n_j := \frac{\eta N_j}{L} \quad , \quad j = 1,\ldots,J$

$$a^{1)} := \frac{r'(\eta-1)\sum_j \bar{q}_j}{L} \quad .$$

Dann gilt:

$$a a + \sum_j \eta_j b_j = \frac{\eta}{L} x - r' \frac{\sum_j \bar{q}}{L} a = : d' .$$

d' entspricht $\bar{d}$ in den Komponenten, die größer Null sind. Existieren in d' negative Komponenten, was bedeutet, daß $\bar{d}$ an diesen Stellen Nullen hat, dann kann obige Linearkombination nicht den Vektor $\bar{d}$ liefern. Andererseits ist sie

---

1) Hier!

die einzige Kombination, die die positiven Komponenten von $\bar{d}$ erzeugt.
Es gibt also keine Linearkombination aus a und den b_j mit dem Ergebnis $\bar{d}$, sofern nicht alle Komponenten von $\bar{d}$ nicht negativ sind.

Hieraus folgt, daß - abgesehen von dem Fall, in dem die sicheren Kontrakte so niedrig ausfallen, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintritts negativer Differenzen $(\eta\xi_s - r'\sum_j \bar{q}_j)$ gleich Null ist - der Titel $\bar{d}$ eine neue Handlungsalternative und damit neue Möglichkeiten der Aufspaltung der ungewissen Nachfrage bietet.
Der entscheidende Unterschied zu üblichen Beteiligungsmodellen ist die Konstruktion der Nichtbeteiligung der Eigner der neuen Titel an den negativen Differenzen $(\eta\xi_s - r'\sum_j \bar{q}_j)$, die auftreten müssen, damit nicht von vornherein das Argument der Unwirksamkeit des Vorschlags infolge Arbitragegesetzmäßigkeiten zum Tragen kommt.

Eine beliebige Verwendung des Marktes für Titel $\bar{d}$ - insbesondere die mögliche, aber nicht notwendige Verknüpfung mit dem Arbeitsmarkt oder auch als alternative Anlageform für die Aktienbesitzer - ändert nichts an dieser Überlegung.

3. Schluß

Der Inhalt und die Ergebnisse der Arbeit werden zusammengefaßt.

(1) In Teil 1 wird eine spezielle, inzwischen in der mikroökonomischen Theorie immer weitere Verbreitung findende Theorie für den Ungewißheitsfall kritisch und schon im Hinblick auf den in der vorliegenden Arbeit gewählten Anwendungsbereich dargestellt. Es ist dies die sog. Zeit-Zustand-Präferenztheorie, die auf den Arbeiten von K. J. Arrow (1953, 1964) und G. Debreu (1959) basiert. Die Zeit-Zustand-Präferenztheorie - hier im allgemeinen Arrow-Debreu-Modell (oder kurz A-D-Modell) genannt - dient der Erklärung des Verhaltens der Wirtschaftssubjekte bei Ungewißheit. Sie erweitert den traditionellen Güterbegriff der mikroökonomischen Theorie (L. Walras (1874), I. Fisher (1930)) um die Dimension der in der ungewissen Zukunft alternativ möglichen Zustände.

Im ersten Teil der Arbeit werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Theorie im Vergleich zum Sicherheitsfall am Beispiel der Haushaltstheorie (als Ausgangspunkt der beabsichtigten Anwendung) herausgestellt.

(2) Unter den allgemeinen Bemerkungen über die Begriffe 'Güter', 'Zustände', 'Arten der Ungewißheit', 'Entscheidung', 'Entscheidungskriterien', 'Meßbarkeit des Risikos' ist insbesondere die Unterscheidung zwischen parametrischer Ungewißheit und Transaktionsungewißheit herauszustellen:

- Parametrische Ungewißheit ist Ungewißheit bezüglich der Aktionsergebnisse infolge exogener Einwirkungen, was sich allgemein als unbeeinflußbare Ungewißheit über die Höhe der Anfangsbestände und deren Veränderung im Zeitverlauf charakterisieren läßt.

- Transaktionsungewißheit ist Ungewißheit, die nur im Zusammenhang mit Handelsbeziehungen hervorgerufen wird.

(3) Die Besonderheiten des A-D-Modells lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Entschieden wird über den K-dimensionalen Güterraum

$$X=\left\{x \mid x=(\xi_o,\xi_{11},\ldots,\xi_{ts},\ldots,\xi_{TS}),\xi_{ts}\geq 0\right\}=R_+^K \qquad \begin{matrix} t=0,\ldots,T \\ s=1,\ldots,S \\ K=1+TS \end{matrix}$$

- Die Entscheidungen sind mittels Produktion oder Handel im Rahmen der Erstausstattungen der Haushalte bei allgemein gegebenen Tauschmöglichkeiten zu treffen. Im A-D-Modell werden grundsätzlich vier Arten von Marktsystemen unterschieden: vollständiges, beschränktes (vollständiges), unvollständiges und Marktfolgen-System.

  Ein Marktsystem, in dem K linear voneinander unabhängige Titel gehandelt werden, heißt vollständiges System bezüglich des K-dimensionalen Güterraums. Insbesondere spricht man im Fall von K Elementartiteln von einem vollständigen Elementarsystem.

  Die Folge von Transaktionsungewißheit ist der Handel mit 'assets' statt mit Elementaransprüchen. Assets treten in zweierlei Form auf: 1. Die Leistung ist unabhängig von dem eintretenden Zustand. Der Nachfrager trägt also kein Risiko (sicherer asset, Bond genannt). 2. Es wird über die gesamte Verteilung der Zustandsausstattungen eines Wirtschaftssubjekts abgeschlossen, und zwar über das Residualergebnis nach Abzug der sicheren Verpflichtungen. Hier trägt der Nachfrager das gesamte Risiko (residualer asset, z. B. die Aktie). Beschränktes System und Marktfolgensystem sind das Ergebnis des Handels mit assets.

  Im beschränkten (vollständigen) Marktsystem werden zwar alle vorgegebenen Vektoren des Güterraums gehandelt, jedoch nur in bestimmten Linearkombinationen, deren linear unabhängige Anzahl kleiner ist als die maximale Anzahl der zu unterscheidenden Zustände. Die

formal einfachste Darstellung eines beschränkten Systems ist der asset-Fall.

Ein unvollständiges Marktsystem des A-D-Modells liegt dann vor, wenn Komponenten des Güterraums existieren, die weder elementar noch in Kombination mit anderen Komponenten Handelsobjekt sind. Ein unvollständiges Marktsystem ist die Folge nicht gehandelter Ansprüche. Existieren solche, wird dies in der Nutzenfunktion der Haushalte berücksichtigt.

Ein Marktfolgensystem ist ein (beschränktes oder unvollständiges) System von Folgen temporär geöffneter Märkte, bedingt durch die Transaktionsungewißheit, insbesondere infolge bestimmter zeitlich nicht vorgezogen handelbarer Ansprüche (z. B. human capital).

Die unterschiedlichen Marktsysteme bedingen unterschiedliche Zulässigkeitsbereiche für einen vorgegebenen Güterraum und unterschiedliche individuelle Möglichkeitsbereiche. Dies wird allgemein und anhand eines einfachen Beispiels demonstriert. Insbesondere gilt: Im vollständigen Marktsystem ist der Zulässigkeitsbereich unbeschränkt, also gleich dem Güterraum, im beschränkten System existiert eine sog. Restriktionsmatrix für den Zulässigkeitsbereich, auch die Möglichkeitsbereiche sind hier zu modifizieren.

Das Marktfolgensystem ist für die Analyse mehrperiodiger Entscheidungsprobleme von Bedeutung. Wir beschränken uns in der Anwendung (Teil 2) auf den Einperiodenfall und damit auf das vollständige und das beschränkte Marktsystem.

- Die Zielfunktion der Haushalte bei Ungewißheit ist der Erwartungswert der Nutzen aus den ungewissen Einkommen (Bernoulli-Nutzen). Die Axiome rationalen Verhaltens - Vollständigkeit und Transitivität der subjektiven Rangordnung, Stetigkeits-, Unabhängigkeits- und Eindeutigkeitsaxiom - werden dargestellt und interpretiert im Hinblick auf das A-D-Modell. Diese Axiome sind Grund-

annahmen über das subjektive Entscheidungsverhalten, woraus sich die Forderung ihrer Allgemeingültigkeit ergibt ('rationales Verhalten'). Mit Hilfe des Stetigkeitsaxioms läßt sich der sog. Elementar- oder Kardinalnutzen konstruieren. Die Herleitung des Bernoulli-Nutzens aus diesen Axiomen rationalen Verhaltens wird demonstriert. Es handelt sich beim Bernoulli-Nutzen gewissermaßen um eine 'Kurzfassung' der Entscheidungsprinzipien, deren Beobachtung durch Dritte auf Beachtung der o.a. Axiome unter Risiko schließen läßt.

Einperioden- und Mehrperiodenfall verlangen auch im Ungewißheitsfall im allgemeinen unterschiedliche Optimierungsansätze. Da in der vorliegenden Arbeit nur Sachverhalte analysiert werden, die sich für beide Fälle in nichts Wesentlichem unterscheiden, wird hier allgemein und in Teil 2 (Anwendung) aus Vereinfachungsgründen allein der Einperiodenfall untersucht.

(4) Es wird das (individuelle und gesamtwirtschaftliche) Tauschgleichgewicht für den Einperiodenfall unter Annahme des vollständigen Marktsystems für das A-D-Modell dargestellt (K = 1+S).

Für die Existenz eines inneren Paretooptimums in einer Tauschwirtschaft bei Ungewißheit ist neben den üblichen Annahmen der mikroökonomischen Theorie die Quasikonkavität des Bernoullinutzens erforderlich. Hinreichend hierfür ist die Annahme von Risikoaversion. Umgekehrt ist Risikoaversion zwar für bestimmte, jedoch nicht für alle Fälle der Quasikonkavität erforderlich. Dies wird, aufbauend auf Arrows Arbeit (1964), gezeigt.

(5) Der ursprüngliche Ansatz von Arrow (1964) wird dargestellt und interpretiert. Die Arrowsche Transformation der Transaktionsungewißheit in eine solche der Preisungewißheit mittels der Zweiteilung der Märkte im Einperiodenfall wird demonstriert. Arrows Ansatz (Version 2) kann als Marktfolgensystem einfachster Art verstanden werden.

(6) Für das beschränkte Marktsystem wird anhand einer Arbeit von S. Fischer (1972) die Äquivalenz des A-D-Ansatzes mit dem Portefeuilleansatz aufgezeigt, des weiteren die Ermittlung der Restriktionsmatrix für den Zulässigkeitsbereich des A-D-Ansatzes aus dem zugehörigen asset-Ansatz, sowie die Optimierungsansätze und die Herleitung der Optimalbedingungen erster Ordnung für beide Systeme. All dies wird anhand eines einfachen Beispiels erläutert.

(7) Als Zwischenergebnis (Teil 1) läßt sich also festhalten: In einer Welt der Ungewißheit planen rational handelnde Haushalte ihre optimale zeitliche Konsumfolge gemäß dem Ziel der Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens durch Umstrukturierung ihrer Ansprüche auf gegenwärtiges (sicheres) und künftige (sichere bzw. risikobehaftete) Einkommen. Diese Gleichgewichtsrisikoverteilung hängt ab von der Erstausstattung der Haushalte, ihren Präferenzen, Risiko betreffend, ihren Wahrscheinlichkeitsvorstellungen und davon, inwieweit Risiko handelbar ist. Die individuelle Gleichgewichtsrisikoverteilung in diesem Sinne ist zugleich als Gleichgewichtseinkommensverteilung zu interpretieren.

(8) Die in Teil 1 dargestellte Theorie wird in Teil 2 wie folgt angewendet:

In einem 'Grundmodell der Risikobeteiligung' (im folgenden kurz 'Grundmodell') wird untersucht, ob Möglichkeiten der Vermögensumverteilung durch Modifikation der Entlohnungsformen bestehen.

Das Grundmodell ist ein einfacher Anwendungsfall der Zeit-Zustand-Präferenztheorie unter Verwendung von Äquivalenzen aus der Portefeuilletheorie. Die Bausteine des Grundmodells sind die folgenden:

- J Unternehmungen produzieren mit vorgegebenem (sicherem) Kapitalstock und Arbeitseinsatz ein Standardgut, dessen mengenmäßiges Ergebnis je nach objektiv ein-

tretendem Zustand s, s=1,...,S, ausfällt. Dabei hat jede Unternehmung j eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der Produktion. Der Arbeitseinsatz wird ursprünglich sicher (als Titel auf den morgigen Output) entlohnt. Die Entlohnung des Faktors Kapital erfolgt ursprünglich als Beteiligung an dem risikobehafteten Residualeinkommen gemäß der vorgegebenen Anteile der Haushalte an den Unternehmungen.

- I Haushalte planen einen Arbeitseinsatz, der auch abgesetzt werden kann (Annahme der Vollbeschäftigung). Ihr Einkommen aus Arbeit und Kapital strukturieren sie auf den Titelmärkten zwecks Optimierung des morgigen ungewissen Verbrauchs um.

- Es existieren folgende vollkommene Titelmärkte:
  Auf J Aktienmärkten werden die normierten Residualeinkommensanteile der J Unternehmungen gehandelt. Unter der Annahme von J Risikoklassen bedeutet dies einen Handel J unterschiedlicher ungewisser assets. Daneben gibt es den Markt für sicheres morgiges Einkommen (Bondsmarkt).
  Ob die optimale Risikoverteilung realisierbar ist, hängt grundsätzlich von der Anzahl der Märkte im Vergleich zu der Anzahl der möglichen Zustände ab.
  Die Verrechnungen werden real - in heutigen Arbeitseinheiten - vorgenommen, d. h. die Ungewißheit bezüglich der Preise ist ausgeklammert. Risiko ist allein Angebots- und Marktrisiko in Folge ungenügender Tauschmöglichkeiten.

Produktion, Planung und Tausch beziehen sich auf eine Periode. Geplant und kontrahiert wird zu Beginn der Periode, die ungewisse Produktion wird am Ende der Periode zwecks Verbrauch gemäß den anfänglich geschlossenen Verträgen verteilt.

(9) Das Marktsystem des Grundmodells der Risikobeteiligung ist für den Fall, daß die Anzahl der Märkte mindestens so groß ist wie die der alternativ möglichen Zustände ($J \geq S-1$) äquivalent einem Marktsystem von S Elementarmärkten auf morgiges Realeinkommen (vollständiges Elementarsystem).

Hieraus folgt:

- Der sichere Titel a ist im Elementarsystem darstellbar als

$$a = \sum_s e_s$$

mit dem Preis

$$p_a = \sum_s \phi_s$$

bzw. $$r = \frac{1}{\sum_s \phi_s} \qquad (r: \text{Reallohn})$$

- Eine Aktie ist darstellbar als

$$b_j = \sum_s \beta_{js} e_s$$

mit $$\beta_{js} = \frac{\xi_{js} - r\bar{q}_j}{N_j}$$

und dem Preis

$$p_{b_j} = \frac{A_j}{N_j} = \frac{1}{N_j}\left[\sum_s \xi_{js}\,\phi_s - \bar{q}_j\right].$$

- Äquivalente Gegenwartswerte der Anfangsausstattungen der Haushalte w_i ergeben in beiden Systemen gleiche Möglichkeitsbereiche für das morgige Einkommen x_i.

- Die individuelle Nachfrage nach den Aktien ergibt sich bei bekannter Nachfrage nach den Elementaransprüchen bei beliebig vorgebbarer Nachfrage nach dem sicheren Titel.

(1o) Die Optimierung der Pläne der Haushalte (hier als asset-Problem untersucht) ergibt die gesamtwirtschaftliche Nachfrage nach dem sicheren Titel und den J Unternehmungsanteilen. Das (ungewisse) reale Gesamtangebot ist vorgegeben. Unter den üblichen Annahmen der mikroökonomischen Theorie existiert dann prinzipiell der Gleichgewichtsvektor bezüglich der Aktienkurse und des Bondskurses (sicherer Reallohn), und damit die Gleichgewichtsrisikoverteilung direkt als Verteilung der Aktien und Bonds auf die I Haushalte, indirekt als Verteilung des ungewissen Produktionsergebnisses. Es gilt nämlich allgemein:
Mit den Titelmärkten sind zugleich die Elementarmärkte im Gleichgewicht.

Dagegen gilt die Umkehrung dieser Aussage nur für den Fall J = S-1. Dies ist eine Umformulierung des Satzes: "Existieren mehr Märkte als Güter, dann gibt es keine eindeutige Zuordnung von Angebot und Nachfrage. Eine solche ist nur möglich bezüglich des Angebots und der Nachfrage auf den 'ableitbaren' Elementarmärkten."

(11) Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten der Vermögensumverteilung (im Grundmodell: der Einkommensumverteilung). Es sind dies die Möglichkeiten der (erzwungenen) Umverteilung durch Beeinflussung der subjektiven Parameter (z. B. Umverteilung durch das Besteuerungssystem) oder der (freiwilligen) 'Umverteilung über den Markt',z.B. durch die Erweiterung der Entlohnungsformen mittels Variation des Titelangebots durch die Unternehmungen. Die vorliegende Arbeit hat die Analyse dieser zweiten Alternative zum Inhalt unter der Annahme von Angebotsneutralität bezüglich des Outputs ('Umverteilung durch Titelangebotsvariation').

(12) Die Wirksamkeit von Umverteilungsmaßnahmen durch Titelangebotsvariation hängt ab einmal von der Annahme über die Marktsysteme, zum anderen von der Art der

(13) Es wird unterschieden zwischen quantitativer und qualitativer Titelmodifikation:

Als quantitative Modifikation der angebotenen Titel ('Angebotsvariation vom Typ A') wird jede mögliche Änderung der Struktur des vorgegebenen ungewissen Güterangebots einer beliebigen Unternehmung bei Konstanz der Titelmärkte bezeichnet.

Als qualitative Modifikation des Titelangebots oder 'Angebotsvariation vom Typ B' wird die Änderung der Struktur des vorgegebenen Güterangebots beliebiger Unternehmungen durch die Einführung neuer Tauschobjekte bezeichnet.

Die Untersuchung angebotsneutraler Titelangebotsvariation beider Typen bei der Entlohnung des Faktors Arbeit ist eine Analogie zu dem Problem der alternativen 'Entlohnungsformen' des Faktors Kapital aus dem Gebiet der Finanzierungstheorie, dort als Modigliani-Miller-Theorem bekannt.

(14) Unter der Annahme eines vollständigen Marktsystems hat im Grundmodell Angebotsvariation vom Typ A keinen Einfluß auf die gesamtwirtschaftliche Gleichgewichtseinkommensverteilung, charakterisiert durch die Gleichgewichtswerte der individuellen ungewissen Einkommen und durch die Gleichgewichtsunternehmungswerte.
Dies läßt sich wie folgt begründen:
Im vollständigen System werden die individuellen Erstausstattungen der Haushalte und der allgemeingültige Zulässigkeitsbereich durch die Umverteilungsmaßnahmen nicht verändert. Da sich die Nachfrage nach dem sicheren Titel im gleichen Ausmaß ändert wie das Angebot auf diesem Markt, hat sich dann, wenn bisher auf allen Titelmärkten Gleichgewicht geherrscht hat, auch auf allen Aktienmärkten die Nachfrage dem dort nun jeweils wertmäßig (und inhaltlich) gestiegenen Angebot angepaßt. Damit sind auch auf den Elementarmärkten Nachfrage und

Angebot, d. h. insbesondere die Gleichgewichtswerte unverändert. Der Zusammenhang wird anhand eines extremen Beispiels 'Übergang zur reinen Beteiligungsentlohnung' verdeutlicht.

(15) Unter der Annahme eines vollständigen Marktsystems (d. h. J = S-1) beeinflußt Angebotsvariation vom Typ B im Grundmodell die Gleichgewichtseinkommensverteilung nicht, denn im vollständigen System ist jeder neue Titel als Linearkombination der übrigen schon vorhandenen realisierbar. Die weitere Überlegung ist daher wie unter (14).

(16) Auch im beschränkten System der Titelmärkte (J < S-1) bleibt der Versuch der Einkommensumverteilung durch Angebotsvariation vom Typ A wirkungslos.

Wie im vollständigen System gilt auch hier:

- Für jedes Wirtschaftssubjekt ist die durch das veränderte Angebot je Titel induzierte Nachfrageänderung je asset gerade so groß, daß das ursprünglich vorhandene individuelle und damit auch das gesamtwirtschaftliche Portefeuillegleichgewicht nicht gestört wird.
- Die Gleichgewichtsunternehmungswerte und der Gleichgewichtsreallohn bleiben unverändert.
- Wegen des veränderten Titelinhalts passen sich die Gleichgewichtspreise für die Aktien bei gegebener Stückzahl an.

(17) Was die Titelangebotsvariation vom Typ B im beschränkten System betrifft, sind prinzipiell zwei Fälle zu unterscheiden:

- Der neue Titel läßt sich auf eine Linearkombination der bereits vorhandenen Titel zurückführen, bzw.
- der neue Titel stellt eine echte Erweiterung der Märkte dar.

Im ersten Fall ist die These (15) unverändert zu über-

(18) Wird im beschränkten Marktsystem des Grundmodells ein neuer Titel eingeführt (echte Basiserweiterung), dann kann bei gegebenem individuellem Gegenwartswert der ungewissen Einkommen der individuelle Möglichkeitsbereich (Anfangsvermögen) und damit die Gleichgewichtseinkommensverteilung verändert werden.
Begründung:
Es sind neue individuelle Güterkombinationen realisierbar und damit Verbesserungen der Risikoverteilung im Prinzip denkbar, die allen nützen. Als Beispiel wird in der vorliegenden Arbeit ein Titel konstruiert, der im Kern dem Vermögensbildungsvorschlag des Sachverständigenrats zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung aus dem Jahre 1972 entspricht.

(19) Umverteilung der Einkommen durch Schaffung neuer Entlohnungsformen, die sich direkt oder indirekt auf den Inhalt 'Quantitative Titelmodifikation' reduzieren lassen, hat unter den Annahmen des Grundmodells, unabhängig von der Annahme über das Marktsystem, nicht das angestrebte Ergebnis; sie läßt die Gleichgewichtseinkommensverteilung unberührt.
Danach ist jede Beteiligungsentlohnung unter den Annahmen des Grundmodells im Hinblick auf Vermögensumverteilung wirkungslos. Dies wird in der vorliegenden Arbeit anhand des Beispiels einer normierten Beteiligungsentlohnung demonstriert.
Die einzige Möglichkeit, im Grundmodell Einkommen durch die Wahl der Entlohnungsformen umzuverteilen, ergibt sich nach den vorangegangenen Überlegungen aus dem Angebot neuer Titel im Sinne von 'linear unabhängig' durch die Unternehmungen, ein beschränktes Marktsystem vorausgesetzt.

(2o) Es sind jedoch Bedingungen denkbar, unter denen die Gleichgewichtsverteilung der riskablen Einkommen auch durch die Hinzunahme neuer Titel im o.a. Sinne nicht beeinflußt werden kann. In der vorliegenden Arbeit werden zwei solcher Spezialfälle herausgestellt,

- der Fall identischer Haushalte und
- der Fall der Gültigkeit des Separationstheorems der Portefeuilletheorie.

Im Fall identischer Haushalte (gleiche Erstausstattungen, Risikopräferenzen und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich Mittelwert und Kovarianzen der Anlageerträge) ist im Grundmodell unabhängig vom Marktsystem keine Umverteilung durch Titelangebotsvariation möglich.

Ebenso ist unter den Annahmen des Separationstheorems der Portefeuilletheorie (Bewertung des Portefeuilles anhand des (μ,σ)-Kriteriums, objektive Wahrscheinlichkeitsverteilung wie eben) - d. h. wenn alle Haushalte die riskablen Titel im gleichen Verhältnis halten - das Gleichgewicht der Einkommensverteilung im Grundmodell durch keine Art der Titelangebotsvariation zu verändern.

Auch wenn einige Erweiterungen des Separationstheorems bezüglich seiner ursprünglichen Annahmen anhand der Literatur aufgezeigt werden konnten, erscheint auch dieser Fall noch sehr spezieller Natur. Inwieweit das Separationstheorem bei Nichthandelbarkeit von Gütern Gültigkeit hat, sollte hier nicht untersucht werden.

(21) Zusammenfassend läßt sich also festhalten: Umverteilung durch die Wahl alternativer Entlohnungsformen ist im Grundmodell der Risikobeteiligung nur dann erfolgreich, wenn neue Kapitalmärkte geschaffen werden.

In der Betrachtungsweise der vorliegenden Arbeit ist es nicht die Schaffung neuer Entlohnungsformen, die die 'Vermögensumverteilung über den Markt' ermöglicht,

sondern letzten Endes die Vervollkommnung der Kapitalmärkte. Die Schaffung neuer Entlohnungsformen ist also nur insoweit sinnvoll, als sie zur Vervollkommnung der Kapitalmärkte beiträgt. Vorrangig erscheint in diesem Zusammenhang das noch relativ ungeklärte Problem der Informationskosten.

Anhang A

Satz: Ein Marktsystem $\mathcal{A}$ im Güterraum $X = \mathbb{R}_+^K$, $K = 1 + TS$, bestehend aus K Elementarmärkten, ist äquivalent jedem beliebigen Marktsystem $\mathcal{A}'$ für K linear unabhängige kombinierte Ansprüche.

Beweis: Verschiedene Basen im K-dimensionalen Vektorraum sind gegeneinander austauschbar (vgl. z.B. M.J. Beckmann und H.P. Künzi (1973), S. 10).

Erläuterung: a) Sei $E^K = \left\{e_o, e_{11}, \ldots, e_{TS}\right\}$ die Menge der Elementaransprüche in X,

mit $e_{ts} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$,

wobei 1 an der Stelle ts steht.

Sei ϕ_{ts} der Marktpreis für den Elementartitel ts.

Da E^K eine Basis von X ist, ist jeder beliebige Vektor $x \varepsilon X$ darstellbar als Linearkombination der Elemente aus E^K, nämlich

$$x = (\xi_o, \xi_{11}, \ldots, \xi_{TS}) = \xi_o e_o + \xi_{11} e_{11} + \ldots + \xi_{TS} e_{TS} \quad .$$

Sei $\bar{x} = (\bar{\xi}_o, \ldots, \bar{\xi}_{TS})$ als Einheit einer beliebigen Güterkombination definiert und

$$x = \lambda \bar{x} \quad , \quad \lambda \varepsilon \mathbb{R}^+ \quad .$$

Unter der Annahme, daß die Transaktionskosten zwischen den Märkten Null sind, gilt

$$p_{\bar{x}} = \phi_o \bar{\xi}_o + \ldots + \phi_{TS} \bar{\xi}_{TS} \quad ,$$

denn sonst wäre Arbitrage lohnend (Gesetz der Preisunterschiedslosigkeit).

Damit ist die individuelle Nachfrage nach bzw. das individuelle Angebot an Güterkomponenten formulierbar als Nachfrage bzw. Angebot bezüglich der Elementaransprüche.

b) Umgekehrt ist jedes andere Marktsystem

$$\mathcal{A} = \left\{ a_j \; ; \; j = 1,\ldots,K, \; a_j \in \mathbb{R}^K \text{ und linear unabhängig} \right\}$$

mit den Preisen p_j ebenfalls ein vollständiges System in dem Sinne, daß jeder kombinierte Anspruch in X darstellbar ist als

$$X \ni x = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j a_j \quad , \quad a_j = (\xi_{0j},\ldots,\xi_{TSj}) \quad .$$

Die α_j sind aus dem folgenden linearen Gleichungssystem zu ermitteln:[1)]

$$\xi_i = \alpha_1 \xi_{i1} + \ldots + \alpha_K \xi_{iK}, \qquad i = 0,\ldots,TS \; .$$

Auch die Preise sind dann als abgeleitete Größen zu berechnen:

$$p_x = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j p_j \quad .$$

Ein Unterschied zwischen p_x und $\sum_{j=1}^{K} \alpha_j p_j$ würde durch Arbitrage ausgeglichen, da x als Linearkombination aus den a_j darstellbar ist. Bei Arbitrageausgleich ist die Nachfrage auf den abhängigen Märkten unbestimmt. Andererseits würde es, solange die Anzahl der Märkte noch kleiner ist als K (Anzahl der Gütermerkmale), Güterkombinationen geben, die nicht auf den bestehenden Märkten eintauschbar wären, so daß sich für diese bei Wegfall der zugehörigen Informationskosten ein Markt (und damit ein Preis) bilden würde.

---

1) Es existiert die Invese zur Matrix $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix}$.

Anhang B

Kurzdarstellung des wesentlichen Inhalts der Portefeuilletheorie[1)]

1. Grundsätzliches

Gegenstand der Portefeuilletheorie i.e.S.[2)] sind Aussagen über die optimale Wahl der Vermögensanlage bei Ungewißheit bezüglich der Erträge der möglichen Anlageformen. Dabei ist den grundlegenden Modellen[3)] gemeinsam an allgemeinen Annahmen:

- Die Vermögenseigner planen nur für eine Periode.
- Die Entscheidung über die Vermögensanlage erfolgt getrennt von der Konsumentscheidung für die laufende Periode[4)].
- Die Bewertung des Einflusses des Endvermögenszuwachses $w_1 - w_o$ auf die Zielgröße 'Erwarteter Nutzen' hängt allein von dem Erwartungswert $\mu := E(w_1-w_o)$ und deren Varianz σ^2 ab ((μ,σ)-Kriterium).
- Die Mittelwerte und Kovarianzen der Anlageerträge sind identische subjektive Schätzwerte. (Insoweit ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung objektiv.)[5)]

Beabsichtigt ist an dieser Stelle eine komprimierte Darstellung der Primärliteratur[6)] mit dem Ziel einer generellen Aussage über das gesamtwirtschaftliche Portefeuillegleichgewicht - auch als Separationstheorem bekannt.

---

1) Der Gedankengang orientiert sich hauptsächlich an dem Übersichtsartikel von M.C. Jensen (1972), insb. Appendix.

2) Der allgemeinere Begriff umfaßt den TSP-Ansatz: "The Theory of Making Decisions Involving Interrelated Uncertain Outcomes", W.J. Sharpe (1970), S. 1.

3) Vgl. hierzu die auf dieser Seite, Fußn. 6 aufgeführte Liste.

4) Dies enthält implizit die Annahme, daß heutiger und künftiger Konsum unabhängig voneinander geplant werden oder anders formuliert: (Gegenwartskonsum und) Anfangsvermögen sind für die Analyse vorgegebene Größen.

5) J. Lintner (1965) untersucht auch den Fall unterschiedlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die Äquivalenz zum ursprünglichen Modell zeigt E.F. Fama (1968).

6) Eine zeitliche Gliederung der entscheidenden Beiträge

2. Das Grundmodell der Portefeuilletheorie[1)]

Annahmen

Untersuchungsgegenstand ist eine Wirtschaft mit J Unternehmungen und I Haushalten als deren Eigentümer. Dabei gelten nun die speziellen Annahmen:

- Die J Unternehmungen sind gekennzeichnet durch die Zufallsvariable 'Auszahlung an die Eigentümer je Periode' G_j mit dem Erwartungswert $\overline{G}_j$, mit der Varianz σ^2_{jj} und den Kovarianzen σ_{jk}, $j,k \in \{1,\ldots,J\}$, $j \neq k$.
  Mit A_j sei der Marktwert der Unternehmung j im Zeitpunkt 0 bezeichnet (abzüglich der Verschuldung, $A_j = V_j - d_j$).
- Die I Haushalte sind gekennzeichnet durch das Anfangsvermögen w_i $(= \sum_j \alpha_{ij} A_j - \overline{d}_i)$,[2)]
  wobei für die Beteiligungen α_{ij}
  und für die Verschuldung d_i
  die Vermögensbeschränkung
  $$w_i = \sum_j \alpha_{ij} A_j - d_i$$
  gilt.
  Es gibt keine Steuern.
- Der Kapitalmarkt ist vollkommen, d. h.
  Alle Beteiligungen, deren Anzahl vorgegeben ist, sind beliebig fein teilbar und werden, ohne Transaktionskosten zu verursachen, gehandelt, wobei die nachfragenden Haushalte als Mengenanpasser auftreten.
  Daneben existiert für alle Wirtschaftssubjekte die Möglichkeit einer risikofreien Anlage, bzw. Kreditaufnahme un-

---

Fortsetzung Fußnote 6) auf Seite167: zur Portefeuilletheorie ergibt folgende Liste:
H.M. Markowitz (1952), J. Tobin (1958), H.M. Markowitz (1959), W.F. Sharpe (1964), J. Lintner (1965 a,b), J. Mossin (1966), E.F. Fama (1968)und(1971).
Eine leichte Einführung bringt W.F. Sharpe (197o).

1) Vgl. die Analogie zum in Abschnitt 1.2.3.3. behandelten asset-Ansatz und damit zum A-D-Ansatz, der Unterschied zwischen den beiden Ansätzen liegt in den Annahmen über die Zielfunktion und über die Wahrscheinlichkeitsvorstellungen. Das hier dargestellte Modell ist diesbezüglich das speziellere.

begrenzten Ausmaßes (mit der exogen gegebenen sicheren Bruttoverzinsung $r = 1 + R_f$[1]), sowie der Möglichkeit, die Beteiligungen (bzw. Anlagen mit bestimmter Laufzeit) jederzeit kurzfristig verkaufen zu können.

In diesem Zusammenhang ist zu beachten, daß die die sichere Verzinsung bringende Anlage als Geldhaltung, bzw. Anlage mit einer Periode Laufzeit zu interpretieren ist, während die sog. 'Festverzinslichen' allgemein zu den riskablen Anlagemöglichkeiten zählen, da bei ihnen, sofern die Laufzeit nicht eine Periode ist, beim Periodenertrag das Kursänderungsrisiko mitberücksichtigt werden muß.

Unter diesen Annahmen erwartet der Haushalt i aus seinem Vermögen (Portefeuille) folgende unsichere Einzahlung in Periode 1 als Mittelwert:

$$\mu_i = \sum_j \alpha_{ij} \bar{G}_j - r d_i$$

mit der Varianz

$$\sigma_i^2 = \sum_{jk} \alpha_{ij} \alpha_{ik} \sigma_{jk}$$[2]

Auswahl des optimalen Portefeuilles (einzelwirtschaftlich)

Für jeden Haushalt wird nun angenommen, daß er durch geeignete Auswahl der α_{ij} (und damit der d_i) den Nutzen aus seinem Endvermögen nach einer Periode maximiert (≙ Maximierung des Nutzens des erwarteten Vermögenszuwachses), wobei alle i die Bewertung der möglichen Vermögenszuwächse allein anhand von deren Erwartungswert und Varianz beurteilen.

---

1) r entspricht dem Reallohn, wie er in der vorliegenden Arbeit definiert wurde, vgl. S.96 oben.

2) Bezüglich der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen vgl. z. B. E. Kreyszig (1965).

Formal:

$$\underset{\{\alpha_{ij},\, d_i\}}{\text{Max}} \quad U_i(\mu_i, \sigma_i), \qquad \frac{\partial U}{\partial \mu} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \sigma} < 0$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_j \alpha_{ij} A_j - d_i = w_i$$

(alternativ als Lagrangeansatz:

$$L = U(..) + \lambda(w_i - \sum_j \alpha_{ij} A_j + d_i)$$

Nach den einzelnen Schritten

- Einsetzen der Nebenbedingung in der Zielfunktion,
- Differenzieren nach den Aktionsparametern α_{ij}, und
- Nullsetzen der ersten Ableitungen erhält man ein Gleichungssystem in den J notwendigen Gewinnmaximierungsbedingungen in den Unbekannten α^{*}_{ij} (d^{*}_{i} errechnet sich dann aus der Vermögensrestriktion):

$$(B\text{-}1)\quad \left(\frac{\partial U_i}{\partial \mu_i}\right)(\bar{G}_j - r A_j) + 2\left(\frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i}\right)\sum_k \alpha_{ik}\sigma_{jk} = 0$$

(J Gleichungen je Individuum)

oder

$$\frac{\bar{G}_j - r A_j}{\bar{G}_t - r A_j} = \sum_k \alpha_{ik}\sigma_{jk} \Big/ \sum_k \alpha_{ik}\sigma_{tk} \qquad \forall i$$

((J-1)-Relationen bezogen auf t).

Die Betrachtung des Gleichungssystems (B-1) zeigt unmittelbar, daß die optimale Portefeuillestruktur[1] von folgenden Parametern abhängt:

- den objektiven Maßzahlen der ungewissen Unternehmungsgewinne, d. h. den Erwartungswerten $\bar{G}_j$ und deren Kovarianzen σ_{jk},

---

1) und damit die Nachfrage nach riskablen, bzw. sicheren Anlageformen gemessen als Anteile an der Anlage des gesamten individuellen Anfangsvermögens.

- von den objektiv gegebenen Preisen A_j und r,
- von dem subjektiven Anfangsvermögen w_i, sowie
- von der subjektiven Risikoeinstellung, die in der individuellen elementaren Nutzenfunktion zum Ausdruck kommt.[1)]

Gesamtwirtschaftliches Portefeuillegleichgewicht

Eine Auswertung der I Gleichungssysteme in den J individuellen Nachfragen nach riskablen Papieren liefert für den Fall des gesamtwirtschaftlichen Gleichgewichts

$$\sum_i \alpha^H_{ij} = 1 \qquad \text{für alle } j$$

folgende Ergebnisse:[2)]

a) Der Preis für eine Risikoeinheit (= Risikoprämie), im folgenden θ genannt, ist unabhängig von der Unternehmung, in der investiert wird.

Dabei wird unter θ die Differenz zwischen dem Erwartungswert des riskablen Gewinns einer Unternehmung und der sicheren alternativen Verzinsung des Gegenwartswerts des Gewinns verstanden, bezogen auf eine 'Kovarianzeinheit':

$$\theta = \frac{\overline{G}_j - r A_j}{\sum_k \sigma_{jk}} \quad , j \text{ beliebig}$$

θ ist auch die Risikoprämie, die sich für das sogenannte Marktportefeuille $\tilde{M}$ errechnet. $\tilde{M}$ kann als fiktives Wertpapier interpretiert werden, dessen Einheit alle Aktien gemäß ihrem wertmäßigen Anteil an $\tilde{M}$ enthält.

$$\theta = \frac{\overline{G}_M - r A_{\tilde{M}}}{\text{var}(G_{\tilde{M}})}$$

---

1) Auch hier sei nochmals auf die Analogie zu Abschnitt 1.2.3.3. hingewiesen, vgl. auch S. 166 , Fußnote 1.

2) Die grundlegenden Arbeiten in diesem Zusammenhang stammen von W.F. Sharpe (1964), J. Lintner (1965 a,b) und J. Mossin (1966).

b) Der Gesamtwert des Aktienkapitals einer Unternehmung errechnet sich im Gleichgewicht als

$$A_j = \frac{1}{r}\left(\bar{G}_j - \theta \sum_k \sigma_{jk}\right).$$

c) Unter den üblichen Annahmen der Portefeuilletheorie[1] ist das gesamtwirtschaftliche Portefeuillegleichgewicht dadurch gekennzeichnet, daß die individuellen Gleichgewichtsanteile an den diversen riskablen Papieren alle gleich sind, so daß jeder Haushalt seine Beteiligung an den vorhandenen Papieren so wählt, als ob er seinen optimalen Anteil[2] an einem fiktiven Marktportefeuille plante, das die diversen Aktien mit ihrem Gesamtwert enthält, Eine Einheit dieses Fonds enthält dann die einzelnen Aktien anteilig zu ihrem wertmäßigen Anteil $A_j / \sum_j A_j$ (sog. Separationstheorem der Portefeuilletheorie).[3]

Zu a) und b):

Die Eigenschaften a) und b) lassen sich wie folgt ableiten:

Dividiert man je zwei der J Gleichungen des individuellen Optimierungsansatzes (vgl. S. 170), so erhält man

$$\frac{\bar{G}_j - r A_j}{\bar{G}_t - r A_t} = \frac{\sum_k \alpha^{M}_{ik} \sigma_{jk}}{\sum_k \alpha^{M}_{ik} \sigma_{tk}} \quad \text{für jedes Paar}(j,t).$$

Die Aufsummierung dieser Relation über die i unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung auf dem Markt k liefert schließlich für alle Paare (j, t)

---

1) Vgl. hierzu Abschnitt 2.2.3.6.

2) und damit die optimale Aufteilung seines Vermögens in die ertragssichere (d^{M}_i) und die riskable Anlage ($\beta^{M}_i \sum_j A_j$). Diese Aufteilung ist allein abhängig von der Höhe des Anfangsvermögens.

3) Vgl. hierzu insb. auch J. Mossin (1966).

$$\frac{\overline{G}_j - r A_j}{\sum_k \sigma_{jk}} = \frac{\overline{G}_t - r A_t}{\sum_k \sigma_{tk}} =: \theta$$

Außerdem gilt

$$\theta = \frac{\overline{G}_{\tilde{M}} - r A_{\tilde{M}}}{\sigma_{\tilde{M}}^2}$$

mit $G_{\tilde{M}} = \sum_j \overline{G}_j$ als Erwartungswert der Summe aller Gewinne der Wirtschaft

$A_{\tilde{M}} = \sum_j A_j$ als gesamter Marktwert der Beteiligungen einer Wirtschaft

$\sigma_{\tilde{M}}^2 = \sum_j \sum_k \sigma_{jk}$

wegen des Zusammenhangs

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = C \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = C ,$$

was sich mittels 'Schluß von n auf n+1' leicht beweisen läßt.

Zu c):

Das Separationstheorem läßt sich formal fassen in dem Satz: Für das Portefeuille-Modell gilt im Gleichgewicht

$$\alpha^{*}_{ij} = \beta^{*}_{i} \qquad \text{für alle } j, i .$$

Beweis: Ausgehend von der individuellen Gleichgewichtsbedingung in Matrixform

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial \mu_i}\right)(\overline{G} - rA) + 2\left(\frac{\partial U_i}{\partial \sigma_i}\right)\sum \alpha_i = 0 ,$$

wobei

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} \overline{G}_1 \\ \vdots \\ \overline{G}_J \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_J \end{pmatrix} , \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{iJ} \end{pmatrix}$$

und $\not\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r1} & \cdots & \sigma_{rr} \end{pmatrix}$ die Kovarianzmatrix bezüglich

der G_j bedeuten,

ergibt sich als Lösung für $\alpha_i = (\alpha_{ij})$, unter der Annahme, daß $\not\Sigma$ nicht singulär ist, in Vektorschreibweise

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \mu_i}\right) \not\Sigma^{-1} \quad (\bar{G}\text{-}rA).$$

Für die verschiedenen Haushalte unterscheidet sich dieser Ausdruck allein in dem Skalar $\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \mu_i}\right)$, d. h. es gilt für beliebige i, i'

$$\alpha_i = \gamma_{i,i'} \alpha_{i'}$$

d.h. $\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ik}} = \frac{\alpha_{i'j}}{\alpha_{i'k}}$ für alle beliebigen j, k . (B-2)

Dieses Ergebnis läßt sich umformen durch Multiplikation der Gleichung (B-2) mit $\alpha_{i'k}$ und Summation über die i'.

Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_i \alpha^{*}_{ij} = 1 \qquad \text{(gilt für alle i)}$$

ergibt sich damit für das Gleichgewicht

$$\frac{\alpha^{*}_{ij}}{\alpha^{*}_{ik}} = 1 \qquad \text{für alle j und k.}$$

Daraus folgt

$$\alpha^{*}_{ij} = \alpha^{*}_{ik} = \beta^{*}_i \;, \quad \text{d.h. } \alpha^{*}_i = \beta^{*}_i \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

was zu beweisen war.

Literatur

ARROW, K.J., "Le Rôle des Valeurs Boursières pour la Repartition la Meilleur des Risques", International Colloquium on Econometrics, 1952, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1953, übersetzt in: "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", Review of Economic Studies, Vol. 31, 1964, S. 91-96

ARROW, K.J., Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Helsinki 1965

ARROW, K.J., Essays in the Theory of Risk-Bearing, Amsterdam 1970

ARROW, K.J., (a) "Limited Knowledge and Economic Analysis", American Economic Review, Vol. 64, 1974, S. 1-10

ARROW, K.J., (b) "General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Techniques, Collective Choice", American Economic Review, Vol. 64, 1974, S. 253-272

ARROW, K.J. and F.H. HAHN, General Competitive Analysis, San Francisco-Edinburgh 1971

BECKMANN, M.J. und H.P. KÜNZI, Mathematik für Ökonomen II, Berlin-Heidelberg-New York 1973

BELLMAN, R., Dynamic Programming, Princeton 1957

BIERWAG, G.O. and M.A. GROVE, "Slutsky Equations for Assets", Journal of Political Economy, Vol. 76, 1968, S. 114-127

BLACK, F., JENSEN, M.C., SCHOLES, M., "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests", in: M.C. Jensen (ed.), Studies in the Theory of Capital Markets, New York-Washington-London 1972, S. 79-121

BORCH, K.H., The Economics of Uncertainty, Princeton 1968

CASS, D. and J.E. STIGLITZ, "The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds", Journal of Economic Theory, Vol. 2, 1970, S. 122-160

DEBREU, G., Theory of Value, New York 1959

DIAMOND, P.A., "The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty", American Economic Review, Vol. 57, 1967, S. 759-776

DOUGLAS, G.W., "Risk in the Equity Markets: An Empirical Appraisal of Market Efficiency", Yale Economic Essays, Vol. 9, 1969, S. 3-45

DRÈZE, J.H., "Market Allocation under Uncertainty", European Economic Review, Vol. 2, 1971, S. 133-165

DRÈZE, J.H., "Econometrics and Decision Theory", Econometrica, Vol. 40, 1972, S. 1-17

DRÈZE, J.H., "Axiomatic Theories of Choice, Cardinal Utility and Subjective Probability: A Review", in: J.H. Drèze (ed.), Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality, Proceedings from a Workshop Sponsored by the International Economic Association, London and Basingstoke 1974, S. 1-23

EBEL, J., Portefeuilleanalyse: Entscheidungskriterien und Gleichgewichtsprobleme, Köln, Berlin, Bonn, München 1971

EKERN, S. and R. WILSON, "On the Theory of the Firm in an Economy with Incomplete Markets", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 5, 1974, S. 171-180

FAMA, E.F., "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments", Journal of Finance, Vol. 23, 1968, S. 29-40

FAMA, E.F., "Multiperiod Consumption-Investment Decisions", American Economic Review, Vol. 60, 1970, S. 163-174

FAMA, E.F., "Risk, Return, and Equilibrium", Journal of Political Economy, Vol. 79, 1971, S. 30-55

FAMA, E.F., "Perfect Competition and Optimal Production Decisions under Uncertainty", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 3, 1972, S. 509-530

FAMA, E.F., "The Empirical Relationships Between the Divided and Investment Decisions of Firms", American Economic Review, Vol. 64, 1974, S. 304-318

FAMA, E.F. and M.H. MILLER, The Theory of Finance, New York 1972

FELS, E. und R. RICHTER, "Entrepreneurship as a Productive Factor", Weltwirtschaftliches Archiv, Band 78, 1957, S. 205-222

FISCHER, St., "Assets, Contingent Commodities, and the Slutsky Equations", Econometrica, Vol. 40, 1972, S. 371-385

FISHER, I., The Theory of Interest, New York 1930

FOLEY, D.K., "Economic Equilibrium with Costly Marketing", Journal of Economic Theory, Vol. 2, 1970, S. 276-291

GUESNERIE, R. and J.-Y. JAFFRAY, "Optimality of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations", in: J.H. Drèze (ed.), Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality, London and Basingstoke 1974, S. 71-86

GUESNERIE, R. and Th. de MONTBRIAL, "Allocation under Uncertainty: A Survey", in: J.H. Drèze (ed.), Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality, London and Basingstoke 1974, S. 53-70

HAHN, F.H., "Savings and Uncertainty", Review of Economic Studies, Vol. 37, 1970, S. 21-24

HAHN, F.H., "Equilibrium with Transaction Costs", Econometrica, Vol. 39, 1971, S. 417-439

HAKANSSON, N.H., "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk, an Uncertain Lifetime, and Insurance", International Economic Review, Vol. 10, 1969, S. 443-466

HAX, H., Investitionstheorie, Würzburg 1970

HENDERSON, J.M. and R.E. QUANDT, Microeconomic Theory: A Mathematical Approach, 2nd ed., Tokyo et al. 1971

HICKS, J.R., Value and Capital, 2nd repr., Oxford 1962

HILDENBRAND, W., "Random Preferences and Equilibrium Analysis", Journal of Economic Theory, Vol. 3, 1971, S. 414-429

HIRSHLEIFER, J., "Investment Decision under Uncertainty: Choice-Theoretic Approaches", Quarterly Journal of Economics, Vol. 79, 1965, S. 509-536

HIRSHLEIFER, J., "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach", Quarterly Journal of Economics, Vol. 80, 1966, S. 252-277

HIRSHLEIFER, J., Investment, Interest, and Capital, Englewood Cliffs, N.J., 1970

JACOB, N., "The Measurement of Systematic Risk for Securities and Portfolios: Some Empirical Results", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 6, 1971, S. 815-834

JENSEN, M.C., "Capital Markets: Theory and Evidence", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 3, 1972, S. 357-398

JENSEN, M.C. and J.B. LONG, Jr., "Optimality of Capital Markets", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 3, 1972, S. 151-174

KREYSZIG, E., Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen 1965

KURZ, M., "Arrow-Debreu Equilibrium of an Exchange Economy with Transaction Cost", International Economic Review, Vol. 15, 1974, S. 699-717

LELAND, H.E., "Production Theory and the Stock Market", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 5, 1974, S. 125-144

LINTNER, J., (a) "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", Review of Economics and Statistics, Vol. 47, 1965, S. 13-37

LINTNER, J., (b) "Security Prices, Risk, and Maximal Gains From Diversification", Journal of Finance, Vol. 20, 1965, S. 587-615

LINTNER, J., "Inflation and Security Returns", Journal of Finance, Vol. 30, 1975, S. 259-280

LONG, J.B., Jr., (a) "Consumption-Investment Decisions and Equilibrium in the Securities Market", in: M.C. Jensen (ed.), Studies in the Theory of Capital Markets, New York, Washington, London 1972, S. 146-222

LONG, J.B., Jr., (b) "Wealth, Welfare and the Price of Risk", Journal of Finance, Vol. 27, 1972, S. 419-433

MARKOWITZ, H.M., "Portfolio Selection", Journal of Finance, Vol. 7, 1952, S. 77-91

MARKOWITZ, H.M., Portfolio Selection: Efficient Diversifikation of Investments, New York 1959

MARSHAK, J., "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility", Econometrica, Vol. 18, 1950, S. 111-141

MAYERS, D., "Nonmarketable Assets and Capital Equilibrium under Uncertainty", in: M.C. Jensen (ed.), Studies in the Theory of Capital Markets, New York, Washington, London 1972, S. 223-248

MAYERS, D., "Nonmarketable Assets and the Determination of Capital Asset Prices in the Absence of a Riskless Asset", Journal of Business, Vol. 46, 1973, S. 258-267

MEADE, J.E., Principles of Political Economy, Vol. 3: The Controlled Economy, London 1971

MERTON, R.C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continous-Time Case", Review of Economics and Statistics, Vol. 51, 1969, S. 247-257

MERTON, R.C., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", Econometrica, Vol. 41, 1973, S. 867-887

MERTON, R.C. and M.G. SUBRAHMANYAM, "The Optimality of a Competitive Stock Market", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 5, 1974, S. 145-170

MILLER, M.H. and M. SCHOLES, "Rates of Return in Relation to Risk: A Reexamination of Some Recent Findings", in: M.C. Jensen (ed.), Studies in the Theory of Capital Markets, New York, Washington, London 1972, S. 47-77

MODIGLIANI, F. and M.H. MILLER, "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment", American Economic Review, Vol. 48, 1958, S. 261-297

MOSSIN, J., "Equilibrium in a Capital Asset Market", Econometrica, Vol. 34, 1966, S. 768-783

MOSSIN, J., "Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets", American Economic Review, Vol. 59, 1969, S. 749-756

MÜCKL, W., Ziele, Mittel und Wirkungen der vermögenspolitischen Konzepte der Bundesregierung, CDU, FDP, SPD, DAG, des DGB und der Bundesvereinigung der Deutschen Arbeitgeberverbände, Untersuchung im Auftrage der Kommission für wirtschaftlichen und sozialen Wandel, Tübingen 1973

v.NEUMANN, J. und O. MORGENSTERN, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961

PAULY, M.V., "The Economics of Moral Hazard", American Economic Review, Vol. 58, 1968, S. 531-537

PRATT, J.W., "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica, Vol. 32, 1964, S. 122-136

RADNER, R., "Competitive Equilibrium under Uncertainty", Econometrica, Vol. 36, 1968, S. 31-58

RADNER, R., "Problems in the Theory of Markets under Uncertainty", American Economic Review, Papers & Proceedings, Vol. 60, 1970, S. 454-460

RADNER, R., "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets", Econometrica, Vol. 40, 1972, S. 289-303

RICHTER, R., Preistheorie, Wiesbaden 1970

RICHTER, R., SCHLIEPER, U., FRIEDMANN, W., Makroökonomik. Eine Einführung. Mit einem Beitrag von J. Ebel, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1975

Sachverständigenrat zur Begutachtung der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung, "Gleicher Rang für den Geldwert", Jahresgutachten 1972/73, Stuttgart und Mainz 1972

SAMUELSON, P.A., (a) "Utility Preference, and Probability", in: J.E. Stiglitz (ed.), The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson, Vol. 1, Cambridge, Mass. and London 1966, S. 127-136

SAMUELSON, P.A., (b) "Probability, Utility, and the Independence Axiom", in: J.E. Stiglitz (ed.), The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson, Vol. 1, Cambridge, Mass. and London 1966, S. 137-145

SAMUELSON, P.A., "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", Review of Economics and Statistics, Vol. 51, 1969, S. 239-246

SANDMO, A., "Capital Risk,Consumption, and Portfolio Choice", Econometrica, Vol. 37, 1969, S. 586-599

SANDMO, A., "Two-Period Models of Consumption Decisions under Uncertainty: A Survey", in: J.H. Drèze (ed.), Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality, London and Basingstoke 1974, S. 24-35

SAVAGE, L.J., The Foundations of Statistics, New York, London 1954

SCHNEEWEISS, H., Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin-Heidelberg-New York 1967

SHARPE, W.F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", Journal of Finance, Vol. 19, 1964, S. 425-442

SHARPE, W.F., Portfolio Theory and Capital Markets, New York et al. 1970

STIGLITZ, J.E., "A Re-Examination of the Modigliani-Miller Theorem", American Economic Review, Vol. 59, 1969, S. 784-793

STIGLITZ, J.E., " A Consumption-Oriented Theory of the Demand for Financial Assets and the Term Structure of Interest Rates", Review of Economic Studies, Vol. 37, 1970, S. 321-351

STIGLITZ, J.E., "On the Optimality of Stock Market Allocation of Investment", Quarterly Journal of Economics, Vol. 86, 1972, S. 25-60

STIGLITZ, J.E., "Incentives and Risk Sharing in Sharecropping", Review of Economic Studies, Vol. 41, 1974, S. 219-255

STIGUM, B.P., "Competitive Equilibria under Uncertainty", Quarterly Journal of Economics, Vol. 83, 1969, S. 533-561

TOBIN, J., "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", Review of Economic Studies, Vol. 26, 1958, S. 65-86

TOMANN, H., RisikoÜbertragung als Mittel der Vermögenspolitik. Entscheidungsprobleme und gesamtwirtschaftliche Wirkungen, Köln,Berlin, Bonn, München 1975

WALRAS, L., Eléments d'économie politique pure, Lausanne 1874, englische Übersetzung von William Jaffé, Elements of Pure Economics on the Theory of Social Wealth, London 1954